

大众数学史

◯ 杨静　潘丽云　刘献军　郭书春　著

“十二五”国家重点图书出版规划项目

中国科学院自然科学史研究所 策划

丛书主编 郭书春





山东科学技术出版社
www.lkj.com.cn

责任编辑 胡 明
装帧设计 魏 然 李玉颖

大众数学史
大众物理学史
大众化学化工史
大众天文学史
大众地学史
大众生物学史
大众医学史
大众农学史
大众建筑史
大众机械技术史
大众纺织技术史
大众军事技术史

读史使人明智，科学使人深刻。科学技术史既蕴含着科技知识，又充满了人的故事。《大众科学技术史丛书》由科技史专家撰写，面向大众读者；兼顾知识与方法，融汇科技与人文；再现发现发明，倡导求真务实；推动文明进步，助力民族复兴。


ISBN 978-7-5331-7658-
9 787533 176587 >
定价：28.00元

大众数学史

◎ 杨静　潘丽云　刘献军　郭书春　著



"十二五"国家重点图书出版规划项目
中国科学院自然科学史研究所 策划
丛书主编 郭书春

山东科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

大众数学史/杨静,潘丽云,刘献军,郭书春著.一济南:山东科学技术出版社,2015
(大众科学技术史丛书)
ISBN 978-7-5331-7658-7

Ⅰ.①大… Ⅱ.①杨… ②潘… ③刘… ④郭…
Ⅲ.①数学史—世界—普及读物 Ⅳ.①O11-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第292318号

大众科学技术史丛书

大众数学史

杨 静 潘丽云 刘献军 郭书春 著

主管单位:山东出版传媒股份有限公司
出 版 者:山东科学技术出版社
地址:济南市玉函路16号
邮编:250002 电话:(0531)82098088
网址:www.lkj.com.cn
电子邮件:sdkj@sdpress.com.cn
发 行 者:山东科学技术出版社
地址:济南市玉函路16号
邮编:250002 电话:(0531)82098071
印 刷 者:山东德州新华印务有限责任公司
地址:德州经济开发区晶华大道2306号
邮编:253074 电话:(0534)2671209

开本:720mm×1000mm 1/16
印张:15.5
版次:2015年6月第1版第1次印刷

ISBN 978-7-5331-7658-7
定价:28.00元

《大众科学技术史丛书》
编　委　会

Foreword 序

英国哲学家培根说，读史使人明智，科学使人深刻。科学技术史图书可以给读者提供一举数得的精神食粮，而科学技术史的普及读物对社会的影响常常比专著还要大。了解科学技术进步的历史不仅有利于掌握知识，更有利于认识科技发展的规律，学会科学发现和技术发明的方法，提高国民特别是青少年学生的素质。因此，向读者提供高质量的科学技术史普及读物，是科学技术史学者和出版机构责无旁贷的使命。

为了充分利用科学技术史传播科学知识，弘扬科学精神，培养青少年学科学、爱科学的良好素质，学术界有必要撰写系统阐述科学技术不同学科发展历史的普及读物。为此，中国科学院自然科学史研究所与山东科学技术出版社商定合作撰写、出版一套《大众科学技术史丛书》。该课题得到有关部门的大力支持，并列入《"十二五"国家重点图书、音像、电子出版物出版规划》增补项目。

本丛书展现历史上的科学技术知识以及科学技术专家的生平、科学活动和科学思想，兼具科学性和人文性，反映科学技术发展与人文思想演进的关系。本丛书力求具有科学性、系统性和通俗可读性。

所谓科学性就是科学准确地表述各学科史的内容，并尽可能汲取最新的研究成果。各册所述内容必须是学术界公认的，经得起时间考验的。对学术界尚有争论的内容，或者以一家为主，兼及别家，或者并列诸家之说。主要学术观点力求有原始文献或转引自权威著作的文献作依据，避免粗制滥造、以讹传讹。

所谓系统性一方面指在书目设置上既有基础学科，又有应用学科，覆盖数学、

物理学、化学化工、天文学、地学、生物学、医学、农学、建筑、机械技术、纺织技术、军事技术等科学技术史的各个主要分支学科；另一方面指每一学科的篇章设置能够涵盖该学科的重要成就、著作和科学家、重大事件和科学技术机构等，要使读者能够比较完整地了解该学科由低到高的不同发展阶段及其在不同文化传统中的特点。

所谓通俗可读性就是既要使用规范的汉语语言和标准汉字，又要做到通俗易懂，雅俗共赏，老少咸宜。在确保科学性的同时，要尽量采用便于大众理解的表述方式，并对历史上出现的、今天已经不再使用的重要术语用现代术语加以解释。

我们希望，广大读者特别是青少年学生通过本丛书既可以领略科学技术的严谨，又能理解它们对经济和社会发展的巨大作用，受到科学精神的熏陶，激发对科学技术的兴趣，树立钻研科学技术的志向。

本丛书各分册的作者都是科学技术史学科有较深造诣的专家，有的是学科的领军人物，有的是成绩突出的中青年骨干。当然，任何工作都是阶段性的，每位学者的知识都有局限性，即使是术有专攻的专家也不例外，因此本丛书也可能有明显的疏漏和错误之处，恳请读者们不吝赐教，以便再版时修正。

中国科学院自然科学史研究所所长、研究员

张柏春

前言

Preface

数学首先是一门科学。数学产生于计数、计算、量度和对物体形状及运动的观察，它通过抽象化和逻辑推理，利用符号语言研究数量、结构、变化、空间以及信息等概念。数学在人类的历史发展和社会生活中起到了不可替代的作用，它极大地提高了人类大脑缜密思维的能力，同时也是物理学、化学、生物学、医学以及经济学、工程技术等自然科学和社会科学领域必不可少的基本工具。

数学又是一种文化。在研究现实世界中数量关系和空间形式的同时，数学文化带来的思想、精神、方法为人类认识世界提供了方法论基础和技术性手段，不仅在数学发展的历史上扮演了不可或缺的角色，而且极大地推动了人类文明的进步。从古希腊哲学家的演绎逻辑，到文艺复兴运动的自由人文理念，再到工业革命带来全新的时空观，每一次数学文化的飞跃，都带来了自然科学的空前繁荣，从而影响到社会生活的方方面面。

数学诞生在四大文明古国。早在古埃及、古巴比伦、古代中国及古印度时期，已经有了许多数学知识。古希腊数学注重空间形式的研究，以及演绎论证思维模式的创立，使数学的发展趋向严谨化，其影响远远超出了数学领域；中国、印度和阿拉伯等地的数学则重视数量关系和算法的研究。中国数学有春秋战国西汉、魏晋南北朝和宋元三个高潮，居于当时世界数学的前列，属于当时世界数学的主流。欧洲文艺复兴时期，东方的算法与古希腊的几何学相结合，在 17 世纪产生了解析几何学和微积分，进入了变量数学阶段，新的科学发现和数学革新两者相互影响，数学高速发展。时至今日，数学的发展日臻成熟，成为涵盖数论、代数学、几何学、

三角学、拓扑学、数学分析、函数论、微分方程、概率论、数理统计学、计算数学、运筹学等众多分支的学科。

数学作为基础学科，是我们从小就必学的课程，但数学又是那么抽象、深奥，让人有晦涩、生硬冰冷的感觉。很多人不知道，在数学冰冷的面孔背后有着丰富多彩的故事。本书就是要带大家进入这个缤纷的世界，去探索数学概念、理论诞生的源头，发现数学发展历史每个不平凡的段落，追寻它发展的轨迹，去认识一位位杰出的数学家，见证学科发展中的重要事件，感悟数学文化的真谛。

本书中的许多章节都可以用厚厚的著作来详细阐述，因此如何在汗牛充栋的文献中选取要介绍的内容是比较困难的。笔者尽力选取某一时期或某位数学家的代表性成就，希望通过这本小书可以让年青的读者对漫长而辉煌的数学发展史有一个概观，领略数学的广泛用途，体会数学独特的魅力及对人类文明发展的重要作用，从而对数学有个全新的认识。

本书撰写分工如下：杨静负责上篇的第一、二、四部分，中篇的第二、三、四部分，下篇的第四、七部分，以及附录；潘丽云负责上篇的第五部分，下篇的第一、三、五、八部分；刘献军负责中篇的第一部分，下篇的第二、六部分；郭书春负责上篇的第三部分。杨静对全书做了统稿。

作者在撰写本书的过程中，得到了中国科学院自然科学史研究所的郭圆圆博士、河北师范大学的王涛博士、人民教育出版社的龙正武博士等许多同仁的帮助，解答了作者的一些疑问，在此特表诚挚的谢意。

最后感谢作者的家人，没有他们的默默支持，本书是不可能完成的。

由于本书涉及古今中外的历史文化及数学的多个分支，囿于作者水平，在具体内容上必存在不少缺点与错误，期待专家和读者的批评指正。

著　者

目录
Contents

上篇　古代数学

中篇　近代数学

下篇　现代数学

附 录



上　篇

古代数学



一、古埃及和古巴比伦数学



古埃及数学

埃及跨亚非两洲，大部分位于非洲东北部，处于中东和北非的交汇之地。它的西面和南面是世界上最大的撒哈拉沙漠，东面、北面大部分被红海、地中海环绕，东北面是面积只有 6 万平方千米的西奈半岛，半岛大部分被沙漠和高山覆盖，东西两侧则夹在亚喀巴湾和苏伊士湾之间。凭借着这种天然的地理屏障，古埃及得以长期不受外敌侵犯，维持了长期的安定。埃及还拥有世界上最长的河流——尼罗河。这条自南向北贯穿埃及全境、最后注入地中海的河流冲刷出了一条狭长而肥沃的河谷，因为河流的西边是撒哈拉沙漠，东北是阿拉伯沙漠，因此素有“世界上最大沙漠中的最大绿洲”之称。就在埃及这片土地上诞生了绵延三千年(约公元前 3100—前 332)的古埃及文明。这里，是早期数学的发源地之一。

1. 纸草书

尼罗河三角洲中生长着一种纸莎草，当地人采摘后用其茎秆中心的髓切成细长的狭条，压成一片，经过干燥处理，就可以形成薄而平滑的书写表面。古埃及人一直在这种纸上书写，一直使用到 8 世纪。所谓的纸草书是指用纸莎草书写并装订起来的书籍。

我们今天了解的关于古埃及人的数学知识，主要是依据两部纸草书：莱茵德纸草书和莫斯科纸草书。莱茵德纸草书最初发现于埃及底比斯古都废墟，1858 年为苏格兰古董商人莱茵德购得，因此命名为此，现藏于伦敦大英博物馆。莱茵德纸草书又称为阿姆士纸草书，以纪念公元前 1650 年左右一位抄录此书的抄写员。莫斯科纸草书也叫戈列尼雪夫纸草书，由俄国贵族戈列尼雪夫在埃及购得，现藏于莫斯科普希金精细艺术博物馆。

这两部纸草书年代十分久远，阿姆士在前言中称到那时为止，此书至少流传了两个多世纪。据考证，莫斯科纸草书的成书年代大约在公元前 1890 年。因此，这两部书堪称流传至今最古老的用文字记载数学的典籍。

这两部书是各种类型的数学问题集。莱茵德纸草书的主体部分由 85 个问题组成，莫斯科纸草书由 25 个问题组成。书中的问题大多来自现实生活，比如面包的成分、啤酒的浓度、牛和家禽的饲料比例及谷物储存，作者将它们作为示范性的例子编集在一起。

2. **几何学**

古埃及几何学产生于尼罗河泛滥后对土地的重新丈量。假如河水冲毁了一个人所得的任何一部分土地，国王就会派人去调查，并通过测量来确定损失地段的确切面积。莱茵德纸草书和莫斯科纸草书含有许多几何学性质的问题，内容大多与土地面积和谷堆体积的计算有关。

在大约公元前 2 世纪的一份地方契约中，人们发现了古埃及人求任意四边形面积的公式，用现在的符号表示为$\frac{(a+b)(c+d)}{4}$，其中 a,b,c,d 分别表示四边形的对边。当然，这个公式只有在四边形是长方形时才是正确的。

但是古埃及人对圆面积却给出了很好的近似。在莱茵德纸草书第 50 题中，假设一个圆的直径为 9，则其面积等于边长为 8 的正方形。如果比较圆面积计算公式 $s=\pi r^2$，就相当于 π 值为$(8\times\frac{2}{9})^2\approx 3.1605$。但是没有证据表明纸草书的作者是否有明确的圆周率概念。

古埃及人在体积计算问题上达到了相当高的水平，例如他们已经知道圆柱体的体积是底面积乘以高。莫斯科纸草书第 14 题给出了高为 h，上下底面分别是边长为 a 和 b 的正边形的平截头方锥体的体积公式：$V=\frac{h}{3}(a^2+ab+b^2)$。

这个结论是正确的，并且具有对称的形式，这是一项非常了不起的成就。

3. **单位分数**

在石器时代，人们只需要整数，但进入到更先进的青铜时代以后，分数概念和分数记号便应运而生。从纸草书中可以发现，古埃及人有一个有趣的特点——喜欢广泛使用单位分数，即形如 $1/n$ 的分数。他们把所有的真分数（小于 1 的有理数）表示成若干不相同的单位分数之和。莱茵德纸草书中给出了一张形如 $2/k$（k 为从 5 到 101 的奇数）的分数分解为单位分数之和的表。比如，$\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$，$\frac{2}{11}=\frac{1}{6}+\frac{1}{66}$，…，$\frac{2}{101}=\frac{1}{101}+\frac{1}{202}+\frac{1}{303}+\frac{1}{606}$。利用这张表，就可以把 7/29 表示成：$\frac{7}{29}=\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{58}+\frac{1}{87}+\frac{1}{232}$。

古埃及人为何对单位分数情有独钟，原因尚不清楚。不过，有了单位分数，分数的四则运算得以进行，尽管这样做起来比较麻烦。这个问题发展成为被后人称作埃及分数（Egyptian Fractions）的数学问题。埃及分数属于数论的一个分支——不定方程，它讨论的是下列方程的正整数解：

$$\frac{m}{n}=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_k}$$

埃及分数引出了大量的问题，其中有许多至今尚未获得解决。

加法运算是古埃及人最基本的算术运算，乘法运算是通过逐次加倍来完成的。例如，69 乘以 19 这样进行：69 加倍得 138，138 加倍得 276，再加倍得 552，再加倍得 1 104，这就是 69 的 16 倍。由于 19＝16＋2＋1，所以 69 乘以 19 等于 1 104＋138＋69＝1 311。除法运算中，加倍程序被倒过来执行，即，除数取代了被除数的地位而被拿来逐次加倍。

加法运算和单位分数使古埃及人的计算笨重繁复。面积、体积算法常常不明确区分精确公式与近似关系，使得古埃及人的实用几何带上了粗糙的色彩。这些都阻碍了古埃及数学向更高水平发展。公元前 4 世纪古希腊人征服古埃及以后，这一古老的数学文化完全被蒸蒸日上的古希腊数学所取代。

古巴比伦数学

古巴比伦位于美索不达米亚平原的东南部，即现今巴格达周围向南直至波斯湾的地区，巴比伦城是这一地区的首府，因此又简称巴比伦。底格里斯河和幼发拉底河灌溉的美索不达米亚平原，土地肥沃，孕育出了灿烂的文明，古巴比伦人不仅创造了楔形文字，还制定出最早的法典，建立了城邦，发明了陶轮、帆船、耕犁等。

与古埃及人在纸草书上书写的习惯不同，古巴比伦人用尖芦管在湿软的泥板上刻下楔形的文字，然后将其晒干或烘干，这样制作的泥板文字比纸草书易于保存，迄今已有 50 万块出土，成为我们了解古巴比伦文明的主要文献。现存的这些泥板书中，有 300 多块是数学文献。我们今天对于古巴比伦人数学水平的了解，便是基于这些材料。

在计数方式上，大多数文明采用的是十进制，古巴比伦人则独出心裁，采用了 60 进制。众所周知，古巴比伦人把一天分成 24 小时，每小时 60 分钟，每分钟 60 秒。这种计时方式后来传遍全世界，至今已沿用四千多年。有趣的是，他们只用了两个记号，即垂直向下的楔子和横卧向左的楔子，再通过排列组合，便可以表示所有的自然数。另外，在古巴比伦人的数字符号中，一个数处于不同位置可以表

示不同的值，这种位值原理是一项了不起的成就。他们甚至把这个方法应用到分数之中，这样一来，在处理分数时就不必像古埃及人那样依赖于单位分数了。

优良的记数系统使得古巴比伦人擅长计算，他们创造出许多成熟的算法，开方根即是其中的一例。这种方法简单有效，具体步骤如下：为求$\sqrt{a}$的值，设 a_1 为其近似值，先求出 $b_1=a/a_1$，令 $a_2=(a_1+b_1)/2$；再求出 $b_2=a/a_2$，令 $a_3=(a_2+b_2)/2$；继续下去，这个数值会越来越接近$\sqrt{a}$，并在其正确值附近振荡。例如，在由美国耶鲁大学收藏的一块泥板书（编号 7289）里，$\sqrt{2}$的近似值是 1.414 213，这是相当精确的估计。

古巴比伦人在代数领域也达到了相当的高度。古埃及人主要是求解线性方程，对于二次方程他们只会解 $ax^2=b$ 这类最简单的情形。古巴比伦人则可以处理比较一般的三项二次方程。在耶鲁大学收藏的泥板书里，给出了相当于二次方程 $x^2-px-q=0$ 的求根公式：$x=\sqrt{(\frac{p}{2})^2+q}+\frac{p}{2}$。

由于正系数二次方程没有正根，因此在古代与中世纪，二次方程一直被分成三类来研究：$x^2+px=q$；$x^2=px+q$；$x^2+q=px$。

在古巴比伦泥板书中可以找到所有这三类方程，并都有正确的求解程序。不仅如此，对于 $x^3=a$ 或 $x^3+x^2=a$ 这类特殊的三次方程，古巴比伦人虽然没有办法来求得一般的解法，但却能通过查立方表或立方根表来求解。

在几何学方面，即与测量等实际问题相关联的数值计算问题方面，古巴比伦人掌握了三角形、梯形等平面图形的面积公式，棱柱、平截头方锥等一些立体的体积公式。他们还知道图形的相似性概念。可是他们的几何成就并没有超过古埃及人。例如，他们对四边形的面积估算与古埃及人的计算公式一致，十分粗糙。至于圆的面积，他们通常认为其值为半径平方的 3 倍，即取圆周率为 3，其精确度不及古埃及人。

"普林顿 322 号"泥板书（图 1-1）的来历已经无法考证，只知道曾被一个叫普林顿的人收藏过，322 号是他个人的收藏编号，现存于纽约哥伦比亚大学图书馆。普林顿 322 号是一块更大的泥板文书的右半部分，因为其左边断裂处留有现代胶水的痕迹，这说明缺损部分是出土后丢失的。现存的这块泥板面积很小，长、宽分别为 12.7 厘米和 8.8 厘米。书写在上面的文字是古巴比伦语，年代应在公元前 1600 年



图 1-1　普林顿 322 号泥板书

以前。

这块泥板上只刻着一张表格，由 4 列 15 行 60 进制的数字组成。在相当长的时间内，它被误认为是一张商业账目表而未受到重视。1945 年，时任美国《数学评论》编辑的诺伊格包尔发现了普林顿 322 号的数论意义，才引起了人们对它的极大兴趣。

诺伊格包尔的研究表明，普林顿 322 号与毕达哥拉斯数组有关。所谓毕达哥拉斯数组是指满足 $a^2+b^2=c^2$ 的任何正整数数组(a,b,c)（最小的一组是 3,4,5）。从几何学角度来讲，每一组毕达哥拉斯数皆构成某个整数边长的直角三角形的三条边长。诺伊格包尔发现，第 2,3 列的相应数字，恰好构成直角三角形的斜边 c 和一条直角边 b。只有四行除外，诺伊格包尔认为那可能是笔误，并作了纠正。

例如，用十进制表示这张表上的第 1,5 和 11 行数字，分别是数组(120,119,169)，(72,65,97)，(60,45,75)。每组第一个数是计算后得出来的另一条直角边 a。在补出空缺数字后，诺伊格包尔发现，第 4 列的数字是 $s=(\frac{c}{a})^2$，即 s 是 b 边所对角的正割的平方。也就是说如果 b 边所对的角为 B，则 $s=\sec^2 B$。普林顿 322 号第 4 列实际上给出了从 31°到 45°的正割函数平方表，角度的间隔约 1°。古巴比伦人是如何计算出这些数字的，这无疑是一个谜。

纸草书和泥板书上记录有账目、卖货单据、抵押契约、待发款项，以及分配利润等事项，可见古埃及人和古巴比伦人将数学大量地应用在实际生活中，算术、代数被用于商业交易，几何公式则用来推算土地面积，计算存储在圆形仓或锥形仓中的粮食。当然，无论古埃及人的金字塔，还是古巴比伦的通天塔和空中花园，都凝聚着数学的智慧和光芒。

总之，古埃及和古巴比伦人的数学主要是解决各类具体实际问题的实用知识，处于原始算法积累时期。各种几何图形面积、体积的计算公式，本质上属于算术的应用。古代实用算法积累到一定阶段，必然会对它们进行系统整理与理论概括，向理论数学的过渡是由古希腊人实现的。

二、古希腊数学



古希腊的数学在数学史中占有头等重要的地位，古希腊人是古典数学的奠基者，他们率先从哲学的角度，提出了公理化体系和形式逻辑，使用逻辑证明、演绎法，强调量化和系统化，并且把数学应用到工程、军事和社会生活上，从而使数学发展成为一门具有严密的系统、富有逻辑性的学科，开启了后世数学和科学的大门，现代所使用的数学和科学方法绝大部分直接来源于古希腊。

古希腊位于欧洲南部，地理范围大致以希腊半岛为中心，包括爱琴海诸岛、小亚细亚西部沿海、爱奥尼亚群岛以及意大利南部和西西里岛。温润的地中海气候使这里成为人类最早的驻居地，而独特的地理环境又孕育了辉煌的古希腊文明。古希腊地区虽然遍布山岭沟壑，土地贫瘠，但由于其地处欧、亚、非三大洲要冲，海岸曲折，港湾众多，广阔的海洋为其提供了另一种发展空间。公元前5—前6世纪，古希腊人在继承爱琴文明的同时，通过吸取古巴比伦、古埃及、波斯文明的精华，经济高度繁荣，在政治制度、军事、经济、文化等诸多方面创造出非凡的成就，古希腊的数学正是在这一时期发展起来的。

在古希腊，数学与哲学是相伴相生的。希腊人的哲学思想，以严谨的逻辑性著称，他们善于通过精细的思考和严密的推理去认识世界，许多数学家首先是哲学家。古巴比伦人和古埃及人为了解决建筑上的问题，积累了大量的数学知识，他们回答的是“应该怎样做”。古希腊人在探究前人的数学工作时，将哲学思想带进数和几何形状中，有意识地解决了“为什么要这样做”，将人类早期的“经验数学”逐步转化为“理论数学”。

古希腊的数学研究内容广泛，最早创造了“算术”“几何”与“三角学”这些术语与科目。希腊文“算术”的原意是“数（shù）和数数（shǔ shù）的技术及学问”，现在算术仍然是研究自然数、分数、小数的四则运算及乘方、开方运算的科目。“几何”的希腊文，是由“土地”和“测量”两个单词组合而成。“三角学”则是古希腊人出于预报天体运行路线、计算日历、航海等需要，对平面三角形和球面三角形边角关系展开的研究。

古希腊数学①活跃在公元前600年至公元600年间，研究领域涉及现在的哲学、数学、天文学，主要分为三个时期。

首先是雅典时期，约为公元前7世纪中叶到公元前3世纪。涌现了泰勒斯、毕达哥拉斯及其学派、柏拉图等一大批哲学和数学家。

第二个时期为亚历山大前期，从欧几里得起到公元前146年，希腊陷于罗马为止。这个时期以留下千古名著《几何原本》的欧几里得和被誉为"数学之神"的阿基米德最为著名，他们的工作代表了古希腊数学的最高成就。

第三个时期是亚历山大后期，是罗马人统治下的时期，结束于641年，这一年亚历山大被阿拉伯人占领。"地心说"的集大成者托勒密(Claudius Ptolemy)和被誉为"代数之父"的丢番图是这个时期的重要学者和数学家。

"万物皆数"——古希腊人对"数"的崇拜

古希腊人在数学上的贡献源于对"数"的崇拜。毕达哥拉斯曾经说过："万物皆数"，认为一切自然现象都可以用"数"来解释，无论是解说外在物质世界，还是描写内在精神世界，都不能没有数！

1. 科学和哲学之祖——泰勒斯

泰勒斯(Thales，约公元前625—前547，图1-2)，出生于希腊繁荣的港口城市米利都，古希腊时期的哲学家、数学家、天文学家，据说曾游历埃及，创立希腊最早的哲学学派——米利都学派(也称爱奥尼亚学派)，是古希腊及西方第一个有记载、有名字留下来的自然科学家和哲学家，被称为"科学和哲学之祖"。

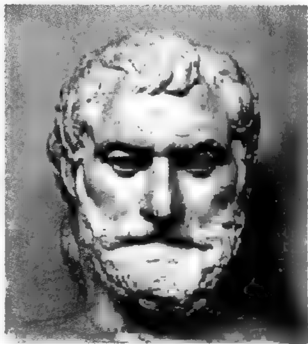


图1-2　泰勒斯

泰勒斯是最早引入命题证明思想的数学家，推导出不少平面几何学的定理。包括：①直径平分圆；②等腰三角形两底角相等；③两条直线相交，对顶角相等；④三角形两角及其夹边已知，此三角形完全确定；⑤半圆所对的圆周角是直角；⑥在圆的直径上的内接三角形一定是直角三角形。这些定理虽然当时或许已经存在于社会实践中，但是泰勒斯第一次把它们整理成一般性的命题，并论证了它们的严格性。

据说，一年春天，泰勒斯来到埃及，人们为了试探一下他的能力，向他提出测量金字塔高度的难题。在法老和不少围观的百姓面前，泰勒斯走近金字塔，阳光

①古希腊数学与古希腊是两个不同的概念。古希腊在公元前2世纪就结束了，但古希腊数学还延续了很长时间，直到阿拉伯人侵入。

把他的影子投在地面上。每过一会儿，他就让别人测量他影子的长度，当测量值与他的身高完全吻合时，他立刻于金字塔在地面的投影处作一记号，然后再丈量金字塔底到投影尖顶的距离。这样，他就给出了金字塔的确切高度。在法老的请求下，他向大家讲解了如何从“影长等于身长”推导到“塔影等于塔高”的原理，也就是今天所说的相似三角形定理。

泰勒斯还是一位哲学家与物理学家，他提出了“水生万物，万物复归于水”和“万物有灵”的观点。他在天文学上的贡献，主要包括对小熊星座的确认，把一年的时间修订为 365 天，对太阳及月球大小的估量，还曾经准确地预测了一次日食。

泰勒斯在数学中引入逻辑证明，保证了命题的正确性，这标志着人们对客观事物的认识从经验上升到理论，是数学史上一次不寻常的飞跃，为毕达哥拉斯创立理性的数学奠定了基础。

2. 神秘学派——“毕达哥拉斯”学派

毕达哥拉斯(Pythagoras，约公元前 580—前 500，图 1-3)，出生在爱琴海中的萨摩斯岛，古希腊数学家、哲学家。据说毕达哥拉斯曾经求教于泰勒斯，并听从其劝告，远赴巴比伦、埃及等地游学。回到希腊后定居于今天意大利东南沿海的克洛托内(Crotone)，并在那里建立了一个政治、学术、宗教三位一体的“友谊联盟”，今天称之为“毕达哥拉斯”学派。他们相信依靠数学可使灵魂升华，万物都包含数，甚至万物都是数。

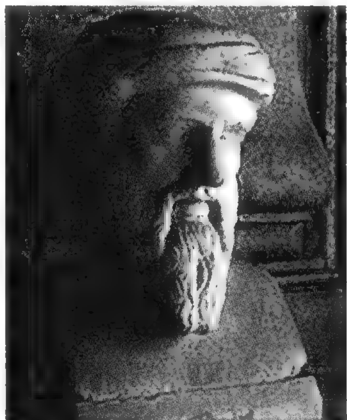


图 1-3　毕达哥拉斯

毕达哥拉斯学派是一个秘密社团，具有浓厚的神秘主义和宗教色彩。学派的每个成员都要求在学术上达到一定的水平，加入组织还要经历一系列严格的仪式，以求达到“心灵的净化”。社团的组织纪律很严密，实行男女地位平等，一切财产都归公有，所有成员必须接受长期的训练和考核，遵守严格的规范和戒律，并且宣誓永不泄露学派的秘密和学说。学派的教义鼓励人们自制、节欲、纯洁、服从，戒律制定得十分严苛，甚至有些不通情理，像“禁食豆子”“不要用铁拨火”都是戒条之一，但这些奇怪的禁忌观念并没有妨碍他们追求人与自然和谐共进的幸福。毕达哥拉斯学派持续繁荣了两个世纪之久，之后组织逐渐分散，保密的教条被摈弃，出现了公开讲述学派教义的著作，毕达哥拉斯本人及其学派的思想和学说开始变得广为人知。

毕达哥拉斯学派把“万物皆数”作为基本信条，认为整个宇宙是数及其关系的和谐体系，一切真理都可以用比例、平方及直角三角形去反映和证实。“万物皆

数”所说的数仅指正整数，分数则被看成两个整数之比。他们认为数1生成所有的数，并命之为“原因数”(Number of Reason)。每个数都被赋予了特定的属性，而在一切数中最神圣的是10，将10看成是完美、和谐的标志。毕达哥拉斯学派对数进行了各种分类，除了偶数和奇数之外，他们还定义了素数、完全数、过剩数、不足数、亲和数等概念。这是数论研究的最早开端，对整数的研究已经达到了一个相当高的境界。

毕达哥拉斯学派非常注重自然数与图形的关系，强调数是几何的基本元素，这种数形结合的观点可以看作是解析几何的最早研究。比如，当数是1,3,6,10等时，对应的图形是正三角形，这些数叫作三角形数；当数是1,4,9,16等时，对应的图形是正方形，这些数叫作正方形数；当数是1,5,12,22等时，对应的是正五边形，这些数叫作正五边形数，如图1-4所示。他们还进一步发现了不同种类数的内在联系，比如，每个大于1的正方形数都可以表示成两个相邻三角形数的和，即4=1+3,9=3+6,16=6+10,等等。

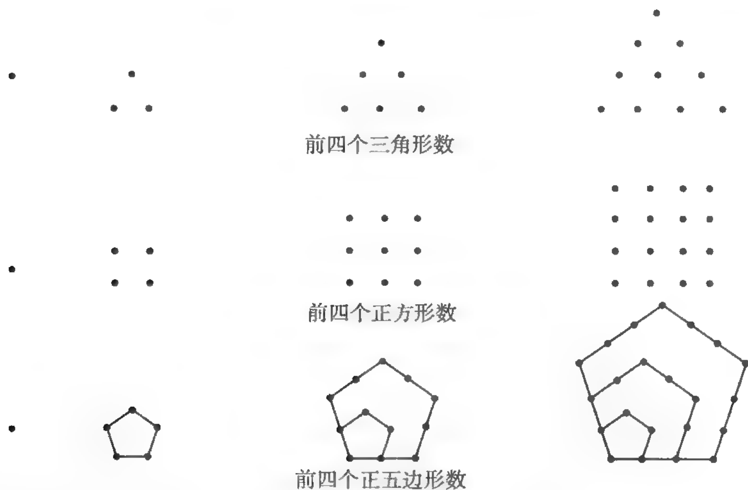


图1-4　自然数与图形

据说是毕达哥拉斯发现了勾股定理，对直角三角形的三边关系进行了描述：若直角三角形的三边长度分别为a,b,c，其中c为斜边，则$a^2+b^2=c^2$。虽然，中国人在更早的时候就知道边长为3,4,5的三角形是直角三角形，而古埃及人也用这个原理建造出他们的金字塔，但首先给出合乎逻辑证明的是毕达哥拉斯。因此，西方人把这个定理称为“毕达哥拉斯定理”。毕达哥拉斯本人也认为这是一个伟大发现，为此他还破例宰牛祭神。“毕达哥拉斯定理”是初等几何中最精彩、最

有用的定理之一。它的重要意义可以概括为以下几个方面：

(1)它是历史上第一个把数与形联系起来的定理；

(2)它导致了不可公度量的发现，由此引发了第一次数学危机，大大加深了人们对数的理解；

(3)它是欧几里得几何的基础定理，并有巨大的应用价值。

毕达哥拉斯认为事物各部分间具有一定的数学比例关系，提出了黄金分割定律 $a:b=(a+b):a$，即将整体一分为二，较大部分与较小部分之比等于整体与较大部分之比，其比值为 1.618∶1(或 1∶0.618)。这样的比例是最能引起人的美感的比例，0.618 被公认为最具有审美意义的比例数字。这极大影响了古希腊的建筑风格，古希腊人通常把平面构成设计为 1∶1.618 的矩形，从而创造出美轮美奂的古希腊建筑，至今仍让人叹为观止。

毕达哥拉斯学派还把数的概念引入音律，证明了单弦的调和乐音与弦长的关系，认为数是音乐和谐的基础，成为音乐理论的始祖。毕达哥拉斯学派在天文学上的贡献是认为大地是球形的，提出了太阳、月亮和行星作均匀圆周运动的思想，证明太阳、月亮、星辰的轨道和地球的距离之比分别等于三种主要的和音，即八音度、五音度、四音度。毕达哥拉斯学派在哲学、伦理、教育等方面同样有不俗的成就。

3. 第一次数学危机——“无理数”的发现

毕达哥拉斯学派对数的研究还局限在有理数范畴内，认为任何量都可以表示成两个整数之比。这在几何上相当于说：对于两条任意给定的线段，总能找到第三条线段作为公共度量单位，将给定的两条线段划分为整数段，即这两条线段的长度是可公度量。这类似于公约数的概念。

学派成员希帕苏斯(Hippasus，公元前 470 左右)在深入研究直角三角形，用几何方法表示$\sqrt{2}$时产生困惑，找不出办法用整数及分数表示出$\sqrt{2}$的值，“不可公度量”①即无理数得以被发现。毕达哥拉斯学派到底如何发现了“不可公度量”，大致有两种说法。一种说法是由正五边形及其对角线形成的五角星图样出发，因为如果两对角线相交，则其一分另一为黄金分割，再使用“辗转相减”程序，就会发现

---

①两个量如果可以找到一个公共的单位来度量，使得每一个量都是那个单位的整数倍，则称两量是可公度量。如果这样的单位不存在，则称两量是不可公度量。

深刻认识到数量之间有不可公度的现象，是一个关键性的转折。只有经历过这个关卡，才能逐渐了解到要想使每个几何物体都有数值度量，就必须引入另一种性质截然不同的“数”——无理数。

正五边形的边与对角线是不可公度量。另一种说法是根据亚里士多德的一段叙述，不过证明的细节则见于欧几里得《几何原本》的第十卷，假设单位面积正方形的边与对角线是可公度量，则利用毕达哥拉斯定理能推出奇数等于偶数的矛盾结果。

毕达哥拉斯学派对不可公度量向来望而生畏，当时正在海上集会的学派成员听到希帕苏斯的发现后惊恐不已，不承认不可公度量的存在，随即将他抛入了大海淹死，希帕苏斯成为无理数发现的殉葬品。

“不可公度量”的发现动摇了毕达哥拉斯学派的数学理论基础，给他们带来了重大危机。而且继$\sqrt{2}$之后，越来越多的无理数被发现，对古希腊的数学观点带来了极大的冲击，也深深困扰住了古希腊的数学家。这就是数学史上所说的“第一次数学危机”。

“不可公度量”的发现表明，几何学的某些定理与算术无关，几何量不能完全由整数及其比表示，反之数却可以由几何量表示，毕达哥拉斯学派所推崇的“万物皆数”此时遇到了前所未有的困难，整数的尊崇地位受到挑战，于是几何学开始在希腊数学中占有统治地位，同时这也反映出，直觉和经验不一定靠得住，而推理与证明才是可靠的。从此古希腊人开始由“自明的”公理出发，经过演绎推理，建立起几何学体系。这可以说是第一次数学危机的自然产物，同时更是数学思想的一次巨大革命。

第一次数学危机并没有很快轻易解决。直到公元前370年，才由柏拉图的学生欧多克斯(Eudoxus，约公元前408—前355)给出了解答，他纯粹用公理化方法创立了新的比例理论，巧妙地处理了可公度量和不可公度量。这个问题到19世纪德国数学家戴德金(R. Dedekind，1831—1916)及康托尔(G. Cantor，1845—1918)等人建立了现代实数理论后才算彻底解决。

毕达哥拉斯学派在数学中引入逻辑因素，对命题加以证明，是欧几里得公理化体系的先驱。虽然，他们的成果由于保密原则没有立刻产生普遍性的影响，但他们的历史功绩是永远不可磨灭的。

对称的追求——古希腊对宇宙与物质的认识

古希腊人认为对称美是数学美的一个基本形式，他们把“对称”由一个含糊的描述发展成为精确的几何概念。正多面体(也称为正则体)具有最好的对称性，它的发现丰富了古希腊人对物质的认识。

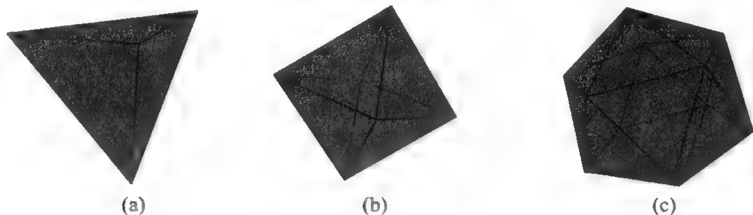
1. 三维空间中的正则体

三维空间中的正多面体只有五种：正四面体(正三棱锥)，正六面体(立方体)，

正八面体，正十二面体，正二十面体。据说是古希腊学者泰特托斯(Theaetetus，公元前415—前369)，最早完整地描述了这五个正多面体。

为了得到点与点之间的完美对称，正多面体的每一面必须是一个正多边形，而且所有的面必须相同。

泰特托斯首先用等边三角形去构造正则体。当2个三角形相交于一个顶点，除了共面之外，不能形成三维空间。当3个三角形相交于一个顶点，它们的底构成了另一个等边三角形，得到正四面体，如图1-5(a)所示。当4个三角形相交于一个顶点，得到了一个底是正方形的棱锥，两个这样的棱锥底对底地放在一起，得到正八面体，如图1-5(b)所示。当5个三角形相交于一个顶点，继续这种模式，就得到了正二十面体，如图1-5(c)所示。当6个三角形相交于一个顶点，这时内角和为360°，它们构成了一个平面，不能形成一个有限的立方体，显然不能用等边三角形构造出更多的对称正则体。



(a) (b) (c)

图1-5 正四面体、正八面体和正二十面体

接着，用正方形(正四边形)构造正则体，也只能从3个正方形开始，得到正六面体，如图1-6所示。当4个正方形相交于一个顶点，又形成了共面。

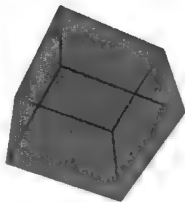


图1-6 正六面体

用正五边形构造正则体，可以摆放12个正五边形，得到正十二面体，如图1-7所示。正五边形的内角为108°，当超过3个正五边形相交时必会形成重叠。

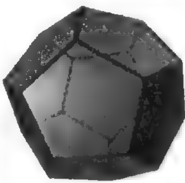


图1-7 正十二面体

对于正六边形来说，相交于一点的三个正六边形形成共面。由此得出没有一个更高阶的多边形可以生成一个正则体，所以刚刚提到的五个正则体——正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体、正二十面体，是全部的正多面体。

另外，正六面体和正八面体，正十二面体和正二十面体，正四面体与自身，互为对偶。以正六面体和正八面体为例：正六面体有6个面，8个顶点，而正八面体有8个面，6个顶点。以正六面体每个面中心为顶点得到正八面体，以正八面体每个面中心为顶点得到正六面体。

2. 柏拉图的《蒂迈欧篇》

柏拉图(Plato,约公元前 427—前 347,图 1-8),古希腊伟大的哲学家,也是全部西方哲学乃至整个西方文化最伟大的哲学家和思想家之一。为寻求知识,他曾经遍游意大利、西西里岛、埃及、昔兰尼各地,最后归根于故乡雅典,创办了史上著名的柏拉图学园。柏拉图学园门前树立着"不懂几何者,不得入内"的牌子,可以看出他们对几何的喜爱到了无以复加的程度。

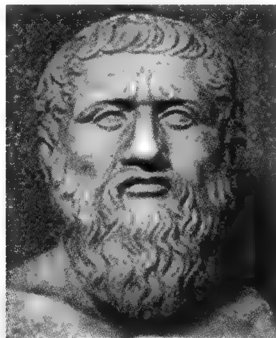


图 1-8 柏拉图

柏拉图在他的著作《蒂迈欧篇》(Timaeus)中,尝试用数学模型来解释物质的结构,详细阐述了他的数学宇宙观。

古希腊人认为,宇宙间的物质仅由四种元素即水、土、火、气组成,柏拉图在书中讨论了五个正则体(现在称之为"柏拉图多面体")的存在性和唯一性,发展了这种思想。他认为"火"元素是正四面体,"土"元素是正六面体,"气"元素是正八面体,"水"元素是正二十面体,而正十二面体组成宇宙空间的第五种元素,叫作"以太"。

柏拉图认为组成物质的最小微粒是"原子",多个"原子"形成了"分子",是构成物质的基本元素。"原子"分为两种平面三角形,第一种的内角为 $\pi/2,\pi/4,\pi/4$,边长为"$1,1,\sqrt{2}$",把正方形切成一半得到;第二种的内角为 $\pi/2,\pi/3,\pi/6$,边长为"$1,2,\sqrt{3}$",把等边三角形切成一半得到。这两种三角形构造了所有正多面体的面,从而证明"分子"是由"原子"组成的。如:用六个第 2 种三角形组成一个正三边形,用四个第 1 种三角形组成一个正方形面(图 1-9)。当然,不可能用这两种直角三角形构造一个正五边形,柏拉图没能构造出正十二面体的面,他只是认为正五边形应该由 30 个第 1 种三角形构成,可能如图 1-10 所示。

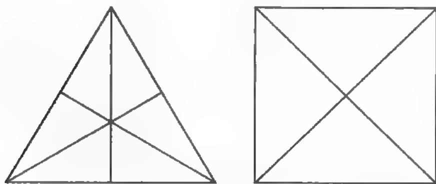


图 1-9 柏拉图用两种"原子"三角形来组成"分子"正多面体的三边形和四边形面

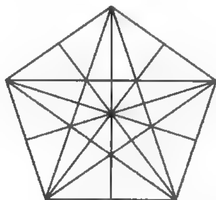


图 1-10 用第一种"原子"三角形组成"分子"正十二多面体的五边形面的可能方法

柏拉图认为分子可能分裂，并重新组合成其他类型的分子。例如，他认为，由120个第1种三角形生成的一个水分子可以分裂变成五个火分子，或者变成两个气分子和一个火分子。同时，他认为，"小一点"的分子可以合并成大分子，例如，两个火分子可以合并形成一个气分子。在解释两种三角形的转换时，柏拉图认为如果一个土粒子恰好分裂成构成它的三角形时，它们将"漂移——要么分裂成火，要么分裂成一团气或水——直到在某处再次相遇，它们重新合在一起，又组成了土"。

令人惊奇的是，现代物理学表明，宇宙确实如古希腊学者所猜测，是"对称"与"和谐"的，只是其表现的"对称"与"和谐"形式与他们所设想的大不相同。在某种意义上说，现代物理学的发展证实了柏拉图关于宇宙是完美对称的猜测。

演绎——古希腊数学的精髓

雅典文化的鼎盛时期延续了半个世纪后，文化中心逐渐从雅典转移到亚历山大城。随着古希腊人开始掌握形式逻辑、演绎和公理化体系，在几何学中广泛采用公理化方法，加之代数上取得的成就，使数学脱离哲学，逐渐发展成为一门具有严密系统、富有逻辑性的演绎科学。古希腊数学至此达到全盛时期。

1. "几何之父"——欧几里得

欧几里得(Euclid，公元前325—前265，图1-11)，出生于雅典，古希腊时期数学家、教育家。成年后客居亚历山大城，从事数学研究和教学。欧几里得的传世之作《几何原本》是历史上最成功的教科书，他也被称为"几何之父"。


图1-11 欧几里得

古希腊的数学发展到这个时期，已经积累了大量几何学的知识，然而这些知识大多数是片断和零碎的，公理与公理之间、证明与证明之间缺乏联系性，也没有对公式和定理进行严格的逻辑论证和说明，难以成为一整套可以自圆其说、前后贯通的知识体系。欧几里得敏锐地察觉到，把这些几何学知识加以条理化和系统化，是几何学理论的发展趋势。为此，他从收集以往的数学专著和手稿开始，不断向有关学者请教，经过创造性地进行释疑和论证，建立起几何学稳固的逻辑基础。《几何原本》几经易稿而最终完成，使几何学成为一个经得起严格推敲的综合体系，孕育完成了一个全新的研究领域——欧几里得几何学，简称欧氏几何。

欧几里得还是位有"温和仁慈的蔼然长者"之称的教育家。他治学严谨、求

实，对于那些有志于穷尽数学奥秘的学生，他总是循循善诱地予以启发，而又特别鄙视在学习上不肯刻苦钻研、急功近利、投机取巧的人。国王托勒密一世曾问欧几里得："学习几何有无捷径？"欧几里得回答说："几何学无王者之路。"他门下的学生活跃在整个亚历山大时期，阿基米德则是他学生的学生。

2.《几何原本》——演绎数学的《圣经》

《几何原本》(Elements)是数学史上第一座理论丰碑，它的版本几乎覆盖了世界上所有的语言与文字，发行量仅次于《圣经》。

《几何原本》最大的功绩是在数学中确立了演绎范式，这种范式要求一门学科中的每一个命题，必须是在它之前已经建立的一些命题的逻辑结论，而所有这些推理的出发点是一些基本定义和被认为是不证自明的基本原理——公设或公理。这就是演绎数学的公理化思想。

《几何原本》内容包括直线与圆的性质、比例论、相似形、数论、不可公度量的分类、立体几何及穷竭法等 13 卷。这本著作以"点是没有部分的"、"线只有长度没有宽度"等 23 个定义开始，在 5 条公设和 5 条公理的基础上，系统而有组织地排列命题，演绎地证明了 465 条定理。

5 条公设①为：

(1)由任意一点到任意一点可作直线；

(2)一条有限直线可以继续延长；

(3)以任意点为心及任意的距离可以画圆；

(4)凡直角都相等；

(5)同平面内一条直线和另外两条直线相交，若在某一侧的两个内角的和小于二直角，沿这两条直线经无限延长后在这一侧相交。

5 条公理是：

(1)等于同量的量彼此相等；

(2)等量加等量，和相等；

(3)等量减等量，差相等；

(4)互相重合的图形是全等的；

(5)全体大于部分。

---

①《几何原本》中有"公设"与"公理"之分。但从近代数学起，人们不再区分公设、公理，都称之为"公理"。公理指的是某门学科中不需要证明而必须加以承认的某些陈述或命题，即"不证自明"的命题。一门学科如果被表示成公理的形式，那么它的所有命题就可以由这些公理逻辑地推证出来。如果我们把一门学科比作一栋大楼，那么该学科的公理就像是大楼的地基，整栋大楼必须以它为基础而建立起来。

欧几里得《几何原本》中也给出了毕达哥拉斯定理的证明，如图 1-12 所示。首先证明 $\triangle ABD \cong \triangle FBC$，由此可得矩形 BL 的面积＝正方形 GB 的面积。同理可得矩形 CL 的面积＝正方形 AK 的面积。

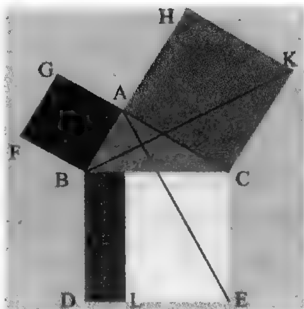


图 1-12　毕达哥拉斯定理的证明

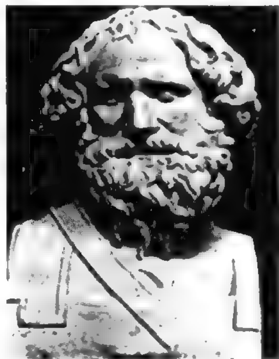
《几何原本》划定了初等几何学的范围，直到 18 世纪末，几何领域都是欧几里得一统天下。斯威克(J. Swick)曾说："《几何原本》对于职业数学家常常有着一种不可逃避的迷惑，而它的逻辑结构大概比世界上任何其他著作都更大地影响了科学思维。"

然而，这个近乎数学"圣经"的欧氏几何并非无懈可击，罗素(B. Russell，1872—1970)曾这样批评道："它的定义并不总是下了定义的，他的公理并不总是不证自明的，他的证明需要许多他还没意识到的公理。"

虽然如此，《几何原本》仍不失为传世巨著，是数学史上的一颗瑰宝。

3. "我将撬动地球"——阿基米德

阿基米德(Archimedes，公元前 287—前 212，图 1-13)，出生于西西里岛的叙拉古，古希腊伟大的哲学家、数学家、物理学家与实用机械的发明家。他在少年时代就来到亚历山大城，追随欧几里得的门人，开始走上了科学之路。阿基米德的许多创造在今天仍然具有重要的科学价值，被后世称为"数学之神"和"力学之父"。


图 1-13　阿基米德

阿基米德把欧几里得严格的推理方法与柏拉图的丰富想象和谐地结合在一起，达到了至善至美的境界。他完成的数学著作是数学阐述的典范，在一定程度上类似于现代数学论文，写得完整、简练，显示出巨大的创造性、计算技能和证明的严谨性。他的名言"给我一个支点，我将撬动地球"，就是通过数学方法对杠杆原理进行严密推理和演绎，得出的在那个时代惊人的结果。阿基米德的成就代表了古希腊科学的顶峰。

阿基米德的著作《圆的度量》，第一个提出了圆周长、圆面积和扇形面积的准确公式，并且提出了这些公式中的一个常数 π 的近似值。他在计算中采用了极限理论的最初形式——"穷竭法"，证明圆的周长介于边数相同的内接多角形和外切多角形的周长之间，这两个多边形的边数不断增加就能无限制地接近圆的周长。阿基米德从正三角形开始，极其巧妙地算到了正 96 角形，得到所谓阿基米德值

$\pi=\frac{22}{7}$,用小数来表示就得到准确度达0.01的近似值3.14,这就是我们今天常用的π值。

阿基米德在计算球的体积时用的是"平衡法"。他把球的体积分成许多微小单元(如薄片),再用另一组标准的微小单元来进行比较,而后一组微小单元的总和比较容易计算,由此积出整个球的体积,这种方法体现了现代积分学的基本思想。

阿基米德在数学上的成就,成为建立微积分概念和方法的关键,使得往后由开普勒、卡瓦列利、费马、牛顿、莱布尼茨等人继续培育起来的微积分日趋完美,可以称得上现代微积分的鼻祖。

阿基米德在物理学方面同样贡献巨大,很多成就正是对实际问题进行演绎、推理而得来的。据说,国王怀疑纯金王冠掺假,向阿基米德提出求证。阿基米德经过冥思苦想,在浴盆中洗澡时突发灵感:不同比重的物质在水中浮力不同,由此发现了伟大的浮力定律(阿基米德定律)。他把同等重量的皇冠和金块放在水中,通过计算排除水的体积,准确得出皇冠掺铅的结论。为了保卫自己的祖国,他根据杠杆原理,并使用了滑轮组,发明了可调整射程、威力强大的射石机,很长时间里让攻城的罗马人束手无策。

阿基米德的死很壮烈。当叙拉古城失陷时,阿基米德还在继续自己的研究,他对冲进来的罗马士兵无动于衷,只希望不要给世上留下一道尚未证完的问题而无意逃生,罗马士兵暴怒之下,一剑把他刺死在几何图形前。

残阳如血——古希腊数学的衰落

在古希腊被纳入罗马的版图之后,活跃的学术思想受到禁锢,古希腊数学的发展进程慢了下来,进入到亚历山大后期。

"代数之父"——丢番图

丢番图(Diophantus,约公元246—330,图1-14),是古希腊亚历山大后期的重要学者和数学家。丢番图是代数学的创始人之一,对算术理论有深入研究,他完全脱离了几何形式,在古希腊数学中独树一帜。



图1-14 丢番图

古希腊数学自毕达哥拉斯学派后,兴趣中心在几何,他们认为只有经过几何论证的命题才是可靠的。为了逻辑的严密性,代数也披上了几何的外衣。一切代数问题,甚至简单的一次方程的求解,也都纳入了几何的

模式之中。

丢番图摆脱了几何的羁绊，把代数解放出来。他认为代数方法比几何的演绎陈述更适宜于解决问题，在解题的过程中显示出了高度的巧思和独创性。丢番图的《算术》，讨论了一次、二次以及个别的三次方程和大量的不定方程。他引入了未知数，并对未知数加以运算，而对于具有整数系数的不定方程的求解则从整数解扩展到正有理数。就引入未知数、创设未知数的符号，以及建立方程的思想这几方面来看，丢番图对代数学的发展起了极其重要的作用，被称为“代数之父”，对后来的数论学者有很深的影响。

丢番图去世前曾出了一道很经典的数学题让人刻在他的墓碑上：“上帝给予的童年占六分之一；又过了十二分之一，两颊长胡；再过七分之一，点燃起结婚的蜡烛；五年之后天赐贵子，可怜迟来的儿子，享年仅及其父之半，便进入冰冷的墓；悲伤只有用数论的研究去弥补，又过了四年，他也走完了人生的旅途。”

假设丢番图活了 x 岁，列方程如下：$x-(\frac{1}{6}x+\frac{1}{12}x+\frac{1}{7}x+5+\frac{1}{2}x+4)=0$，解得 $x=84$，由此可知丢番图活了 84 岁。而丢番图开始当爸爸的年龄则是 38 岁。

古希腊文明曾经出现过耀眼的辉煌，但受到自身贫瘠的地理环境的局限，加之战乱不断，随着公元 7 世纪阿拉伯人的侵入，在无可奈何中走向了黯淡和衰落。但这并不是古希腊文明的终结，在以后的岁月里它会继续演变，以致在近代欧洲的文艺复兴中得到传承和光大。

三、中国古代数学



中国古代数学概说

数学是中国古代最为发达的基础学科之一，从公元前二、三世纪到公元14世纪初，中国数学一直居于世界数学发展的前列，是当时世界数学发展的主流。

中国传统数学的发展可以分成原始社会至西周中国数学的兴起，春秋至东汉中期中国传统数学框架的确立，东汉末至唐中叶中国传统数学理论体系的完成，唐中叶至元中叶中国筹算数学的高潮，元中叶至明末传统数学的衰落与珠算的发展，明末至清末西方数学的传入与中西数学的融会等几个阶段。

中国传统数学有自己明显的特点。首先，与古希腊将数学看成思辨的产物不同，中国传统数学注重数学理论密切联系实际。《汉书·律历志》说数学"所以算数事物，顺性命之理也"，但是宋元之前的数学家几乎都不关心"性命之理"。因此，数学家在研究数学问题的时候，自觉不自觉地贯彻了实事求是的思想路线，正如南宋数学家秦九韶所说"数术之传，以实为体"。

其次，中国传统数学以计算为中心。三国魏数学家刘徽说，数学"以法相传，亦犹规矩度量可得而共"，道出了中国传统数学中数与形相结合，几何与算术、代数问题相统一的特点。而中国传统算法大都有强烈的程序化和机械化色彩。

第三，数学方法正如春秋战国数学家陈子所概括的，是"言约而用博"，因此学习数学要能"通类"，做到"问一类而以万事达"。这类抽象性术文(算法)表明中国古代数学有相当的理论概括。这是中国古代数学理论研究的一个重要方面。

第四，位值制在中国传统数学中有特殊的作用。它不仅体现在记数与数学表达式中，而且贯穿于求解过程中。这大大方便了计算。

数学著作是中国古代数学成就的主要载体。数学著作的形式有不同的分野。《九章算术》等著作的主体部分是以抽象性、普适性的术文为中心，采取术文统率例题的形式。也有一部分著作，如《孙子算经》等，采用应用问题集的形式。

刘徽等数学家的数学证明等表明，中国古代存在着纯数学研究。因为就实际应用而言，《九章算术》和许多数学著作提出的公式、算法，只要能够无数次地应用并且表明它们正确就够了，不在数学上证明之，并不影响它们的应用。而且计算

中对精确度的追求，比如，刘徽开方不尽求“微数”，以十进分数逼近无理根，刘徽、祖冲之将圆周率精确到3位、5位甚至8位有效数字，都不是人们的实际需要，而是纯数学活动，是数学发展的需要。

中国传统数学在20世纪初中断，中国数学开始融入世界统一的现代数学，是历史的进步。但是在全盘西化的时候，将中国传统数学的优秀部分也丢掉了。实际上，中国传统数学的思想和方法对当前数学教学与数学研究仍有启迪作用。

中国数学的兴起——原始社会至西周的数学

1. 图形观念的形成与规矩准绳

人类在与自然的接触中，逐渐形成图形的观念。由树木、禾茎、满月、太阳，人们认识了直线与圆，后来又认识了正方形、三角形等几何形状。在距今约七八千年的裴李岗文化和稍晚的河姆渡、崧泽、仰韶文化中都有方形和圆形房基遗存和器物，如图1-15所示。

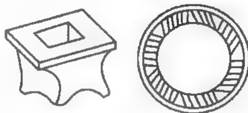


图1-15　新石器文化遗存中的方形和圆形



图1-16　伏羲、女娲执规矩图

古代用规画圆，用矩画方。相传黄帝时的倕发明了规矩准绳。汉代许多画像砖上有伏羲手执矩、女娲手执规图。图1-16是新疆阿斯塔纳唐墓出土的织帛伏羲、女娲执规矩图。

2. 十进位值制记数法的形成与算筹的创造

(1)十进位值制记数法的形成

人们对数的认识也经历了一个漫长的过程。《世本》云：“隶首作数。”相传隶首是黄帝的臣子，处于新石器时代晚期。《周易・系辞下》说：“上古结绳而治，后世圣人易之以书契。”这是说在上古人们用结绳与刻木记数、记事。随着文字的萌芽与发展，也出现了记数文字。新石器时代的许多陶器上刻画有数字。

现今通用的十进位值制记数法最早产生在中国。殷商的甲骨文数字是现存最早的关于十进制记数法的资料。甲骨文是用龟甲和兽骨进行占卜的记录。甲骨文的正文中出现的数字非常多，最大的数是三万。图1-17所示是一到万的13个基数，已使用十进制记数法，并且有了位值制的萌芽。利用这13个符号，可以表示1万以内的任意自然数。

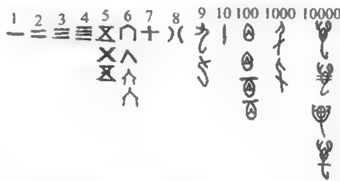


图1-17　甲骨文中的13个基数

十进位值制记数法是什么时候完成的，已不可考。《墨经·经下》说："一少于二而多于五，说在建位。"其《经说下》说："五有一焉，一有五焉，十，二焉。"反映了墨家对十进位值制记数法中同一数字在不同的位置上表示不同的数值的认识。可见最晚在春秋时代，十进位值制记数法已经相当完善。

(2)计算工具——算筹

算筹一般用竹或木制作，也有用象牙或骨制的。《老子》说"善数者不用筹策"。20 世纪以来在战国秦汉墓葬发现的算筹很多，图 1-18 是陕西旬阳县发现的西汉算筹，其形制与《汉书·律历志》的记载基本一致。算筹是宋元之前中国的主要计算工具，中国古代数学的主要成就大都是借助于算筹完成的。

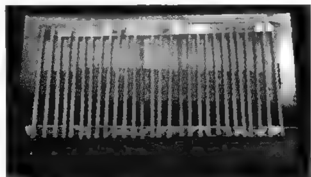


图 1-18 西汉算筹

现存资料中，算筹数字的记数法则最先出现在《孙子算经》卷上，而《夏侯阳算经》更为完整："一从十横，百立千僵，千十相望，万百相当。满六以上，五在上方。六不积算，五不单张。"如图 1-19 所示。因此，算筹数字分纵横两式，纵式表示个位数、百位数等，横式表示十位数、千位数等。

数字	1	2	3	4	5	6	7	8	9
纵式	𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	𝍤	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨
横式	𝍩	𝍪	𝍫	𝍬	𝍭	𝍮	𝍯	𝍰	𝍱

图 1-19 算筹记数法

用这种纵横相间的算筹，并用空位表示 0，就可以表示任何自然数、分数、小数、负数、一元高次方程、线性方程组与多元高次方程组。

3. 数学形成一门学科

(1)九九表与整数乘除法则

九九乘法表在春秋时期已经广泛流传。《韩诗外传》中齐桓公设庭燎以九九表招贤的故事说明在春秋时期乘除算法已经是家喻户晓的常识。十进位值制、算筹计数、九九乘法表的普及，意味着整数四则运算在当时也已普及。根据《孙子算经》的记载，乘法是从高位开始的。除法是乘法的逆运算，被除数称为"实"，除数称为"法"。"法"的本义是标准，后来的开方式的一次项系数也称为法，而开方式、方程的常数项也称为实。

(2)商高答周公问及用矩之道

《周髀算经》卷上记载了商高答周公问。商高系由商入周的数学家，他提出了勾股定理的特例，阐发了方圆与圆方的关系，周公发出了"大哉言数！"的赞叹。接着商高阐发了用矩之道："平矩以正绳，偃矩以望高，覆矩以测深，卧矩以知远"，都

是测量物体高远的方法。

(3)数学成为一门学科

关于贵族子弟的教育,《周礼・地官司徒》说:"保氏掌谏王恶,而养国子以道,乃教之六艺:一曰五礼,二曰六乐,三曰五射,四曰五驭,五曰六书,六曰九数。"九数是数学的九个分支,其细目已不可考,大约含有东汉郑众所列"九数"中方田、粟米、衰分、商功和旁要的某些方法。数学成为贵族子弟的必修课程,说明它已经成为一门学科。

中国传统数学框架的确立——春秋至东汉中期的数学

1. 数学家与数学经典

(1)诸子百家与数学

"九数"之名出于《周礼》。此后九数成为中国古代关于数学分类的模式,但名目已不可考。东汉郑众(? —83)《周礼注》曰:"九数:方田、粟米、差分、少广、商功、均输、方程、赢不足、旁要。今有重差、勾股也。"这应该是春秋战国的"九数"。刘徽《九章算术注序》说"周公制礼而有九数,九数之流,则《九章》是矣"。可见"九数"在先秦已经发展为某种形态的《九章算术》。

《墨子・墨经》有很多条目具有数学涵义,说明墨家具有很高的数学造诣。涉及数学的内容有记数法、倍数观念、几何学、无限观、数量比较原则、逻辑推理原则、整体与部分的关系等很多方面,为我们认识先秦数学的发展水平提供了极为宝贵的资料。比如"圜,一中同长也",便与现今圆的定义十分接近。

(2)秦汉数学简牍

自1983年底张家山汉简《算数书》出土以来,不断有战国秦汉数学简牍被发现。

2007年底湖南大学岳麓书院从香港收购了一批秦简,根据其中一枚简命名为《数》,见图1-20。《算数书》约190支完好,根据第6枚背面的3字命名,见图1-21。存70个小标题,100余条术文或解法,80余道题目。《数》和《算数书》含有分数四则运算法则、比例算法、赢不足术、面积和体积问题的算法以及若干算术杂题。



图1-20 秦简《数》

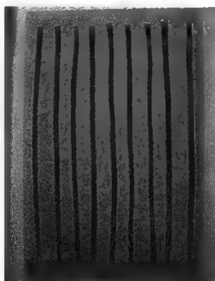


图1-21 汉简《算数书》

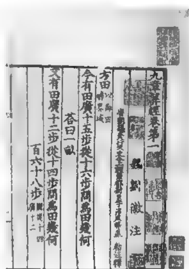


图1-22 《九章算术》

此外，清华大学收购的战国简中有20多枚形成一份大九九算表。北京大学也藏有一批秦简，其中有300余枚数学简，被命名为《算书》。湖北睡虎地则出土了汉简《算术》等秦汉简牍。这些简牍正在整理。

(3)《周髀算经》和陈子

《周髀算经》2卷，是中国最早的用数学方法阐明盖天说和四分历法的数理天文学著作。原名《周髀》，本义是用竖立在周城的表竿进行天文观测计算。其本文原只是商高答周公问，后来人们增补了陈子答荣方问等内容。它最晚成书于公元前1世纪。《周髀算经》描述了盖天说的宇宙模式，大量计算方法中都用到繁杂的分数计算。

陈子是著名数学家、天文学家，生平不详，大约活动在公元前5世纪。荣方在学习数学时感到困惑，陈子批评荣方对数学“未能通类”，而数学方法“言约而用博”，学习数学要能“通类”，做到“类以合类”，“问一类而以万事达”，才能称为“知道”。这是当时存在的数学知识的总结，也规范了后来中国传统数学著作的特点与风格。

(4)《九章算术》和张苍、耿寿昌

《九章算术》是中国古代最重要的数学经典，含有方田、粟米、衰分、少广、商功、均输、盈不足、方程、勾股9卷，如图1-22所示。它含有近百条十分抽象的公式、解法，共有246个例题。其中分数理论、比例、盈不足、开方、线性方程组、正负数加减法则及解勾股形等算法都是具有世界意义的成就。它奠定了中国传统数学的基本框架和长于计算，以算法为中心，算法具有机械化、程序化、构造性的特点，以及数学理论密切联系实际的风格。

《九章算术》的体例相当复杂，主要采用关于一类问题的抽象性、普适性术文统帅若干例题的形式，总共有82术、196问，约占全书的80%，其术文都非常抽象、严谨，具有普适性，换成现代符号就是公式或运算程序，这些术文具有构造性、机械化的特点。再就是应用问题集的形式，这种形式往往是一题一术，约占全书的20%。

关于《九章算术》的编纂，学术界长期聚讼不已。最早谈到《九章算术》编纂过程的是刘徽。他说:“周公制礼而有九数。九数之流，则《九章》是矣。往者暴秦焚书，经术散坏。自时厥后，汉北平侯张苍、大司农中丞耿寿昌皆以善算命世。苍等因旧文之遗残，各称删补。故校其目则与古或异，而所论者多近语也。”对《九章算术》内部结构以及对《九章算术》中物价的分析都表明，刘徽的话是颠扑不破的。

《数》、《算数书》等秦汉数学简牍中分数、除法、发问方式、答案的表述十分繁杂，没有统一的格式。张苍、耿寿昌编定《九章算术》时才完成了数学术语的统一

与规范化，这是他们的巨大贡献。

张苍（？—前152），阳武（今河南原阳东南）人，西汉初年政治家、数学家、天文学家，明悉天下图书计籍。公元前207年，参加刘邦起义军，因功封为北平侯（今河北满城），迁为计相，掌管各郡国的财政统计，后为丞相。他善于计算，精通律历，确定汉初使用的历法和度量衡制度，删补《九章算术》。

耿寿昌，数学家、理财家、天文学家。宣帝（公元前73—前49年在位）时为大司农中丞，"善为算，能商功利"。

2. 分数、今有术与盈不足术

(1)分数及其四则运算法则

在人类认识史上，人们认识分数比小数早得多。中国是世界上使用分数最早的国家之一。《数》、《算数书》、《九章算术》在世界数学史上第一次建立了完整的分数四则运算法则。

根据《孙子算经》的记载，分数的筹式记成二行，分母在下，分子在上。若是带分数，则记成三行，整数部分在上，分母居下，分子居中。

约分是化简分数而不改变分数值的方法。《数》、《算数书》与《九章算术》都提出了约分术，大同小异。《九章算术》约分术是："约分术曰：可半者半之。不可半者，副置分母、子之数。以少减多，更相减损，求其等也。以等数约之。"等或等数就是最大公约数。求等数的更相减损程序与欧几里得《几何原本》第七卷求最大公约数的方法是相同的。

合分术即分数加法法则。《数》、《算数书》和《九章算术》都提出了合分术。《九章算术》的合分术是："合分术曰：母互乘子，并，以为实。母相乘为法。实如法而一。不满法者，以法命之。其母同者，直相从之。"设两个分数分别为$\frac{b}{a}$，$\frac{d}{c}$。这个法则就是$\frac{b}{a}+\frac{d}{c}=\frac{bc}{ac}+\frac{ad}{ac}=\frac{bc+ad}{ac}$。减分术即分数减法法则，与合分术对称。

乘分术是分数乘法法则，经分术是分数除法法则。经分在《算数书》中称为"径分"。《九章算术》经分术是先将法、实通分，再将两者分子相除。其程序是：$\frac{b}{a}\div\frac{d}{c}=\frac{bc}{ac}\div\frac{ad}{ac}=bc\div ad=\frac{bc}{ad}$。而《算数书》的"启从"条则应用了颠倒相乘法。

(2)今有术与衰分术、均输术

比例算法在中国传统数学中称为今有术，即现今所谓"三率法"。它在《周髀算经》、《数》、《算数书》、《九章算术》等数学著作中都有应用。《九章算术》粟米章提出今有术："今有术曰：以所有数乘所求率为实，以所有率为法，实如法而一。"设$A:B=a:b$，则$B=Ab\div a$。刘徽特别重视今有术，认为是解决比例算法的一般方

法，任何数学问题只要找出它们的率关系，再使用齐同术，都可以归结为今有术。

衰分在先秦称为差(cī，等级)分，是比例分配问题，中国传统数学的重要分支。《九章算术》衰分章首先提出衰分术，再给出若干例题。“衰分术曰：各置列衰，副并为法。以所分乘未并者各自为实。实如法而一。不满法者，以法命之。”设所分配的量为 A，各部分的分配比例称为列衰，设为 m_i，分配所得的各部分为 a_i，$i=1,2,\cdots,n$。在旁边将列衰相加，计算出 $\sum_{j=1}^{n} m_j$，作为法。依次计算出 Am_i，$i=1,2,\cdots,n$，作为实。于是分配后的各部分为 $a_i = Am_i \div \sum_{j=1}^{n} m_j$，$i=1,2,\cdots,n$。刘徽又将衰分术归结为今有术。

如果按列衰的倒数进行分配，就是返衰问题。

《九章算术》均输术实际上是一种更为复杂的比例分配问题，亦用衰分术解决。《数》、《算数书》和《九章算术》的衰分问题包括衰分术和返衰术两种方法。而对它们在运用衰分术之前，必须根据各县户数或人数、行道日数及物价、僦价、佣价等因素计算出使各县的每户(人)劳费均等的均平之率，以求出各县的列衰。

(3)盈不足术

中国传统数学盈不足类问题大都含有两种内容，一是盈不足问题，一是应用盈不足术解决的一般数学问题。《数》、《算数书》和《九章算术》都有这两种内容。钱宝琮、李约瑟等学者都认为，中国的盈不足术后来传入阿拉伯和欧洲，成为他们解题的主要方法。

《九章算术》云：“盈不足术曰：置所出率，盈、不足各居其下。令维乘所出率，并，以为实。并盈、不足为法。实如法而一。有分者，通之。盈、不足相与同其买物者，置所出率，以少减多，余，以约法、实。实为物价，法为人数。”对共买物的问题：今有人共买物，每人出 A，盈(或不足)a，每人出 B，不足(或盈、或适足)b，求人数、物价。盈不足术首先提出了求不盈不朒(nǜ，不足)之正数$=(Ab+Ba)\div(a+b)$。这条术文用于解决一般数学问题。《九章算术》接着给出了物价$=(Ab+Ba)\div|A-B|$，人数$=(a+b)\div|A-B|$。

古代人们解复杂的算术问题的能力较低，但是发现，对于任何一个算术问题，任意假设一个答案，代入原题，必定会出现盈、不足、适足三者之一。那么，总有两次假设，可以将其化为盈不足问题。《九章算术》求不盈不朒之正数的公式就是为解决这些问题而提出来的。一般数学问题，有的是线性问题，有的是非线性问题。对线性问题使用盈不足术可以求出精确解；然而，对非线性问题使用盈不足术，则只能求出近似解。

3. 面积、体积、勾股与测望

(1)面积

《数》、《算数书》和《九章算术》既有直线形的面积公式，也有曲线形的面积公式，还有个别的曲面形面积公式。直线形有方田、圭田(三角形)、邪田(直角梯形)、箕田(梯形)4 种。《九章算术》等提出的公式与现今相同。

曲线形有圆田、弧田、环田。《九章算术》提出了圆面积的四条公式，其中第一条是"术曰：半周半径相乘得积步。"设圆周长为 l，半径为 r，直径为 d，圆面积为 S，则：

$$S=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{4}ld \tag{1-3-1}$$

它在理论上是正确的，只是两个例题的周径之比均取 3，无法算出精确值。

(2)体积

《数》、《算数书》和《九章算术》共有 20 多种立体体积公式。其中有 19 种多面体，不过，有些多面体在数学上是同一种形状，实际上只有方柱体、长方体、堤、堑堵、阳马、鳖臑、方锥、方亭、刍甍、刍童、曲池、羡除等 12 条体积公式，这里仅介绍几种。

沿长方体相对两棱剖开所得的楔形体称为堑堵，如图 1-23 所示。《九章算术》的堑堵求积方法是："术曰：广袤相乘，以高乘之，二而一。"设堑堵的下广、袤、高分别为 a,b,h，则 $V=\frac{1}{2}abh$。将堑堵斜解，得到 2 个多面体，一个是直角四棱锥，称为阳马，如图 1-24 所示。《九章算术》提出的求积方法为："术曰：广、袤相乘，以高乘之，三而一。"则体积公式为：

$$V=\frac{1}{3}abh \tag{1-3-2}$$

另一个是一个有下广、无下袤、有上袤、无上广的四面体，称为鳖臑，如图 1-25 所示。它的四面都是勾股形。《九章算术》提出它的求积方法是："术曰：广、袤相乘，以高乘之，六而一。"则其体积公式为：

$$V=\frac{1}{6}abh \tag{1-3-3}$$

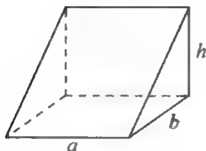


图 1-23　堑堵

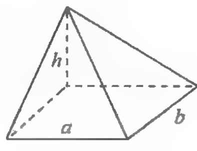


图 1-24　阳马

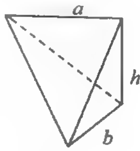
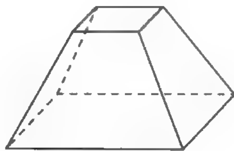


图 1-25　鳖臑


1-26　刍童

方亭即今之正锥台，刍甍下有广、袤，上有袤无广，是一种草垛。刍童也是草垛，若刍甍有上广，便为刍童，如图 1-26 所示。《九章算术》提出："刍童、曲池、盘池、冥谷皆同术。术曰：倍上袤，下袤从之；亦倍下袤，上袤从之；各以其广乘之；并，以高若深乘之，皆六而一。"设刍童的上广、长分别为 a_1，b_1，下广、长分别为 a_2，b_2，高为 h，则其体积公式为：$V=\frac{1}{6}[(2b_1+b_2)a_1+(2b_2+b_1)a_2]h$。羡（yán，通埏）除是隧道，《九章算术》也给出了其体积公式。以上这些公式都是正确的，刘徽所记述的棋验法应该是当时所用的推导方法。

《数》、《算数书》和《九章算术》等都有圆柱、圆锥、圆亭等的体积问题。圆亭即今之圆台，《九章算术》给出的圆亭求积方法是："术曰：上、下周相乘，又各自乘，并之，以高乘之，三十六而一。"设上周 l_1，下周为 l_2，高为 h，则圆亭的体积公式为 $V=\frac{1}{36}(l_1l_2+l_1^2+l_2^2)h$。它在理论上是正确的，由于其系数由 $\pi=3$ 导出，因而不准确。

(3)勾股定理与解勾股形

《周髀算经》、《九章算术》勾股章都明确提出了勾股定理。《九章算术》还解决了已知勾与股弦差求股、弦，已知勾与股弦和求股、弦，已知弦与勾股差求勾、股，已知勾弦差、股弦差求勾、股、弦等四种解勾股形问题。比如引葭赴岸问就是已知勾与股弦差求股、弦的问题。此问(略去答案)是：

今有池方一丈，葭生其中央，出水一尺。引葭赴岸，适与岸齐。问水深、葭长各几何？

术曰：半池方自乘，以出水一尺自乘，减之。余，倍出水除之，即得水深。加出水数，得葭长。

实际上应用了公式：$b=[a^2-(c-b)^2]\div2(c-b)$。20 世纪许多趣味数学读物中的印度莲花问题，实际上是此问的改写，但晚出千余年。

《九章算术》勾股章"二人同所立"、"二人俱出邑中央"问已知勾弦并率、股率和股求勾、弦，使用了勾股数组通解公式：

若以 m 表示勾弦并率，n 表示股率，即 $(c+a):b=m:n$，《九章算术》使用了 $a:b:c=\frac{1}{2}(m^2-n^2):mn:\frac{1}{2}(m^2+n^2)$。现代数论证明，若 m，n 互素，则这就是勾股数组的通解公式。而在这 2 个题目中，恰恰 m，n 互素。这是世界数学史上首次给出勾股数组通解公式。

(4)勾股容方容圆

《九章算术》勾股章还解决了勾股容方、容圆问题。勾股容圆是已知勾股形的

勾、股，求勾股形的内切圆的直径。《九章算术》的方法是："三位并之为法。以勾乘股，倍之为实。实如法得径一步。"此即 $d=\frac{2ab}{a+b+c}$。它开宋元勾股容圆研究之先河。

4. **开方术、正负术、方程术**

现今的方程是 equation(拉丁文 oequatio)的翻译。oequatio 是含有未知数的等式，它相当于中国古代的开方式，与中国古代"方程"(见下)的含义是不同的。清末翻译西方数学著作，将 equation 译作方程或方程式，改变了中国传统数学术语"方程"的含义。

(1)开方术

中国古代将求解形如 $x^n=A(n\geqslant 2)$ 或形如 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x=A$ 的过程都叫作开方。开方术是什么时候产生的，无可稽考。《九章算术》则在少广章中提出了完整的开平方、开立方程序。《九章算术》提出的开方程序是：

开方术曰：置积为实。借一算，步之，超一等。议所得，以一乘所借一算为法，而以除。除已，倍法为定法。其复除，折法而下。复置借算，步之如初。以复议一乘之，所得副以加定法，以除。以所得副从定法。复除，折下如前。

这是一个具有普遍性的开平方程序：作四行布算，第一行是"议得"；第二行布置积，称为实，即被开方数；第三行是法；在最下一行的个位上布置一枚算筹表示未知数的平方，称为"借算"。值得注意的是，此处的"除"，不是以第一位得数的平方减实，而是"以法除实"，"法"、"实"都是除法中的意义。这就是为什么开方术又称作"开方除之"。

《九章算术》还对开方中出现的几种情况提出了处理方法。

《九章算术》勾股章"邑方出南北门"问要求解形如 $x^2+bx=c, b\geqslant 0, c\geqslant 0$ 的正根。《九章算术》还提出了开立方术。

这是世界上最早的多位数开方程序，并奠定了中国开方术的基础，后来经过不断改进、发展，成为中国传统数学的一个最重要的分支。

(2)正负术

引入负数、引入复数是数学史上的大事。提出正负数的加减法则，是中国古代的重要成就。《算数书》中有"负筹"的概念，但是不是负数，学术界还有争论。《九章算术》方程章通过两种途径引入负数，一是正系数方程在消元过程中会以大减小，出现负数；一是有的方程本身就是负系数方程。负数的引入是数系的又一重要扩展。《九章算术》提出了正负数完整的加减法则："正负术曰：同名相除，异名相益。正无人负之，负无人正之。其异名相除，同名相益。正无人正之，负无人负之。"同名即同号，异名即不同号。除是减，益是加，"无人"即"无偶"、"无对"。

前四句是减法法则。设 a,b 皆为正数。如果两者是同号的，则 $(\pm a)-(\pm b)=\pm(a-b),a\geqslant b$；$(\pm a)-(\pm b)=\mp(b-a),a\leqslant b$。如果两者是异号的，则 $(\pm a)-(\mp b)=\pm(a+b)$。正数如果没有被减的数，则变为负数；负数如果没有被减的数，则变为正数。后四句是正负数加法法则。中国负数概念和正负数加减法则的提出超前其他民族几个世纪，甚至上千年。《九章算术》还有大量正负数乘除法的运算，不过首次明确提出正负数乘法法则的是《算学启蒙》。

(3)方程术

方程术是《九章算术》最杰出的数学成就。关于方程的含义，明清以来多有误解。实际上，“方”的本义是指用竹木编成的筏，引申为并；“程”是度量名，引申为考核。因此，“方程”的本义就是“并而程之”，即把诸物之间的各数量关系并列起来，考核其度量标准。一个数量关系排成一行，把它们一行行并列起来，恰似一条竹筏，这正是方程的形状。

《九章算术》方程章第 1 问是：“今有上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，实三十九斗；上禾二秉，中禾三秉，下禾一秉，实三十四斗；上禾一秉，中禾二秉，下禾三秉，实二十六斗。问：上、中、下禾实一秉各几何？”“方程术曰：置上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，实三十九斗于右方。中、左禾列如右方。以右行上禾遍乘中行，而以直除。又乘其次，亦以直除。然以中行中禾不尽者遍乘左行，而以直除。左方下禾不尽者，上为法，下为实。实即下禾之实。求中禾，以法乘中行下实，而除下禾之实。余，如中禾秉数而一，即中禾之实。求上禾，亦以法乘右行下实，而除下禾、中禾之实。余，如上禾秉数而一，即上禾之实。实皆如法，各得一斗。”这是线性方程组的普遍解法。只是当时用抽象的语言难以表达明白，只好借助于禾实来阐述。这里使用直除法即 2 行互乘对减消元，其解法相当于矩阵变换（用阿拉伯数字代替算筹数字）：

1	2	3			3			3			4
2	3	2	4	5	2		5	2		4	
3	1	1	8	1	1	4	1	1	4		
26	34	39	39	24	39	11	24	39	11	17	37
	①			②			③			④	

有的问题只是给出一些关系，不是方程。《九章算术》提出了损益术：“损之曰益，益之曰损。”这是说关系式一端损某量，相当于另一端益同一量；关系式一端益某量，相当于另一端损同一量。通过损益即还原与合并同类项建立方程。

一般认为，代数“algebra”来自于阿拉伯文 al-jabr，是因为花拉子米（al-Khwārizmī，约 783—约 850）写了一部著作《代数学》，书中描述了一个基本运算方

式 al-jabr。al-jabr 在阿拉伯文中的意思是“还原”或“移项”，解方程时将负项由一端移到另一端，变成正项，就是“还原”，然后将两端相同的项消去或合并同类项。显然，《九章算术》使用还原与合并同类项，与花拉子米的意义相同，而早一千年左右。

中国传统数学理论体系的完成——东汉末至唐中叶的数学

1. 东汉末至唐中叶数学概论

(1)魏晋数学的发展与辩难之风

东汉末年至唐中叶，尤其魏晋，是中国传统数学理论体系形成的时期。庄园农奴制成为魏晋经济的主要形态，门阀世族取代了秦汉的世家地主占据统治地位，思想界以谈“三玄”(《周易》、《老子》、《庄子》)为主的辩难之风取代了繁琐的两汉经学，玄学家探讨“理胜”和思维规律，互相辩难、析理，抽象思维能力得到空前发展。刘徽注《九章算术》的宗旨便是“解体用图，析理以辞”。刘徽对数学概念进行定义，追求概念的明晰；对《九章算术》的命题进行证明或驳正，追求推理的正确、证明的严谨，并且遵循简约的原则，等等，与思想界的析理是一致的。魏晋数学在数学方法、数学证明和数学理论方面超过了秦汉。

(2)徐岳《数术记遗》

《数术记遗》1 卷，东汉末年徐岳撰。徐岳，生卒年不详，东莱(今山东省莱州、龙口一带)人。自云《数术记遗》的内容传自历算学家刘洪。徐岳还从刘洪学习《乾象历》。

《数术记遗》仅 600 余字，非常简括。其内容主要有三项：一是阐发了数量的有限与无限的关系，二是大数进法，三是 14 种算法。值得注意的是其中的“珠算”，虽不同于宋明之珠算，却是后者之滥觞。

(3)赵爽与《周髀算经注》

赵爽《周髀算经注》是中国现存最早的算经注。赵爽，字君卿，号婴，生平、籍贯均不详，活动时代有汉、魏晋间及三国吴等各种说法。赵爽对《周髀算经》原文引用若干典籍做了忠实的解释，对后世大有裨益。其“勾股圆方图”注系统总结了《九章算术》以来的勾股算术知识，其“日高图”注用出入相补证明了重差公式。

(4)刘徽与《九章算术注》、《海岛算经》

刘徽，淄乡(今山东省邹平县)人，于公元 263 年撰《九章算术注》10 卷，时年约 30 岁。后来自撰自注的第 10 卷《重差》单行，因第 1 问为测望一海岛的高远而称《海岛算经》。刘徽还著《九章重差图》1 卷，已佚。刘徽博览群书，具有实事求是精神。他不迷信古人，多次批评前人的失误，同时敢于承认自己的不足，寄希望

于后学。他设计的牟合方盖指出了解决球体积公式的正确途径，然而却没能求出其体积，便坦言："敢不阙疑，以俟能言者。"反映了一位真正的科学家的光辉本色。他在世界数学史上首次将极限思想和无穷小分割方法引入数学证明，是中国传统数学理论的奠基者。

根据刘徽自述，《九章算术注》含有"悟其意"（即自己的创造）与"采其所见"（即搜集到的前人研究《九章算术》的成果）两部分内容。

刘徽认为《九章算术》的测望问题都是可望而可及的，没有超邈如太阳那样的对象，而重差术是用来测望可望而不可及的对象。《海岛算经》使用了重表、累矩、连索三种基本测望方法。

（5）南北朝的数学著作和数学家

《孙子算经》现传本为3卷，它不是春秋时期孙武的作品，当成书于公元400年前后。《孙子算经序》认为数学是"天地之经纬，群生之元首"，"万物之祖宗，六艺之纲纪"。如此推崇数学在中国古代是不多见的。《孙子算经》是一部入门读物，卷上列出若干预备知识，卷中的开方术在刘徽的基础上有改进，卷下"物不知数"问是中国乃至全世界数学著作中第一个同余方程组解法问题。有的问题用重因法，开唐宋化多位乘法为个位乘法之先河。

《夏侯阳算经》应成书于《孙子算经》前后。原本在宋以前已亡佚，现传本3卷，是1084年北宋秘书省刊刻汉唐算经时误刻的一部唐代实用算书，但其卷上的"明乘除法"、"言斛法不同"以及卷下"说诸分"个别问题等当是原本的内容。

《张丘建算经》3卷，北魏清河张丘建著，约成书于5世纪上叶。张丘建，生平不详。《张丘建算经》也是比较初级的作品，不过问题大都比《孙子算经》复杂。传本卷中、下之间有残缺。其卷上有最小公倍数的完整求法，还有求等差数列的各元素的若干情形；卷下最后一问是世界数学史上著名的百鸡问题。

祖冲之（429—500），字文远，祖籍范阳遒县（今河北省涞水县），数学家、天文学家、机械制造家。公元462年完成《大明历》，有大量创新和改进。权臣戴法兴指责《大明历》"诬天背经"。祖冲之毫不畏惧，据理驳斥，写出著名的《驳议》，指出"迟疾之率，非出神怪，有形可检，有数可推"，反对"信古而疑今"，表示"浮辞虚贬，窃非所惧"。《驳议》是科学史上一篇重要文献，既反映了祖冲之实事求是的科学学风，又显示了他不畏权贵、敢于坚持真理、敢于斗争的大无畏精神。祖冲之注《九章》，造《缀述》（一说为《缀术》）数十篇，已佚。目前所知道祖冲之的数学成就，仅有将圆周率的计算精确到7位有效数字等几项。其子祖暅之，字景烁，其开立圆术提出祖暅之原理，彻底解决了球体积问题。

甄鸾，字叔遵，北周中山无极（今河北）人，生平不详。甄鸾所撰注的数学书很多，目前传世的有《五经算术》、《五曹算经》、《数术记遗注》以及《周髀算经》的重

述。甄鸾在《数术记遗》“珠算”注中具体描绘了早期的珠算。在“计数”注中，甄鸾提出几个测望问题，是传统数学著作中没有见过的类型。《五曹算经》共 5 卷，解法浅近，有的题目对于十进小数的概念有了新的发展。《五经算术》5 卷，列举儒家经籍的古注中有关数字计算的地方加以详尽解释，但有些解释不免穿凿附会。

(6)隋至唐中叶的数学著作和数学家

刘焯(544—610)撰《皇极历》，创造等间距二次内插法。

《缉古算经》1 卷，唐王孝通撰并注。王孝通，生平不详，历算博士。但他历数历史上的数学家，无一当意者。自以为前无古人，后无来者，目空一切，是不足取的。《缉古算经》解决了比《九章算术》更加复杂的多面体体积问题和勾股问题，是现存最早的记载三次、四次方程的著作。

李淳风等注释《周髀算经》、《九章算术》等 10 部算经，是唐初以前中国数学奠基时期著作的总结。李淳风(602—670)，岐州雍(今陕西省凤翔县)人，天文学家、数学家。迁太史丞，撰《晋书》、《隋书》之《天文志》、《律历志》，是中国天文学史、数学史、度量衡史的重要文献。与梁述等受诏注十部算经，公元 656 年注释完成，作为算学馆教材。其中《周髀算经注释》水平比较高。

-行，俗名张遂(683—727)，魏州昌乐(今河南省南乐县人)。公元 725 年完成《大衍历》，创造不等间距二次内插算法。

2. 算之纲纪——率与齐同原理

刘徽发展完善了率的理论。他给出了率的定义：“凡数相与者谓之率。”并得出其性质：“所得率知，细则俱细，粗则俱粗，两数相抱而已。”刘徽由此提出了率的三种等量变换“乘以散之”、“约以聚之”、“齐同以通之”。

刘徽非常重视今有术，把它看成“都术”(普遍方法)，认为任何问题，只要找出率关系，借助齐同原理，“则终无不归于此术也”。他把衰分术、均输术及若干算术问题都归结到今有术，并指出：“乘以散之，约以聚之，齐同以通之，此其算之纲纪乎。”

3. 测望

(1)重表法

重表法是《海岛算经》的最重要的方法，亦见之于刘徽《九章算术序》测日：“立两表于洛阳之城，令高八尺。南北各尽平地，同日度其正中之时，以景差为法，表高乘表间为实，实如法而一。所得加表高，即日去地也。以南表之景乘表间为实，实如法而一，即从南表至南戴日下也。”如图 1-27 所示，设表高为 h，表间为 d，前

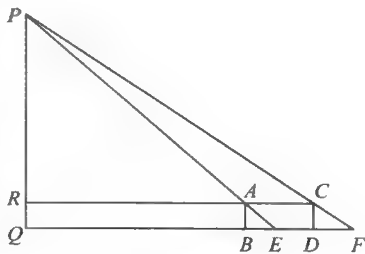


图 1-27　重表法

表 AB，却行至 E，BE 为 b_1，后表 CD，却行至 F，DF 为 b_2，日高 PQ 为 p，前表至日 BQ 为 q，此即：$p=\frac{hd}{b_2-b_1}+h$，$q=\frac{b_1 d}{b_2-b_1}$。《海岛算经》第一问测海岛与此方法相同。此海岛的原型当是泰山。

刘徽还介绍了连索法、累矩法。刘徽还有更为复杂的三次、四次测望的问题。由于刘徽对《重差》的自注及图已佚，清中叶以来，人们开始探讨刘徽的思路，至今还在争论不休。

(2)《数术记遗注》的测望问题

《数术记遗》第 14 种算法的甄鸾注提出了三个测望问题，其中第一个问题是测望河宽，如图 1-28 所示(按古代上南下北绘制)，设河的北岸 A，南岸 B，欲求 AB 的长度。在北岸北侧等距放置垂直于 AB 的三根表。从中表的 E 处望北岸 A 处，交南表于 M，望南岸 B 处，交南表于 N，在北表上取 P，Q 二点，使 $PQ=MN$，$PM /\!/ QN /\!/ AB$，从 E 望 P，交 BA 的延长线于 C，望 Q，交 BA 的延长线于 D，则 $CD=AB$，量出 CD 的长度，便可以知道 AB 的长度。这种将可望而不可及的图形化成可以量得的图形的方法，在现存其他传统数学著作中从未见过。

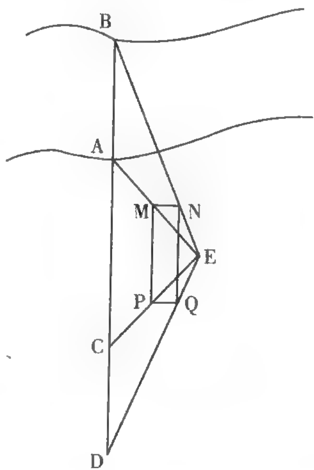


图 1-28　测望河宽

4. 不定问题

刘徽在《九章算术》方程章五家共井问注中指出其答案是“举率以言之”，这是在中国数学史上首次提出存在不定问题。《孙子算经》的“物不知数”问与《张丘建算经》的“百鸡问题”都是世界数学史上著名的不定问题。

“物不知数”问是：“今有物不知其数。三、三数之，剩二；五、五数之，剩三；七、七数之，剩二。问：物几何？”这实际上是现代数论中的一次同余方程组问题，即求满足一次同余方程组 $N\equiv 2(\mathrm{mod}3)\equiv 3(\mathrm{mod}5)\equiv 2(\mathrm{mod}7)$ 的最小正整数 N。术文给出 $N=140+63+30-210=23$。这是世界上数学著作中第一个同余方程组问题。

百鸡问是：“今有鸡翁一直钱五，鸡母一直钱三，鸡雏三直钱一。凡百钱买鸡百只。问：鸡翁、母、雏各几何？”“术曰：鸡翁每增四，鸡母每减七，鸡雏每益三，即得。”《张丘建算经》给出了(4，18，78)，(8，11，81)，(12，4，84)三组解，是其全部正整数解。如何求出这 3 组解，由于术文简括，不得而知，并成为清末数学界的重要

课题。百鸡术影响深远。印度的摩诃毗罗（约公元 850 年）、意大利的斐波那契（1170？—1250）、中亚的阿尔·卡西（？—1429）的著作都有百鸡问题。

5. 无穷小分割和极限思想

刘徽的极限思想和无穷小分割体现在圆面积公式和刘徽原理的证明中。

(1)割圆术

刘徽之前的人们以圆内接正六边形的周长作为圆周长，以圆内接正十二边形的面积作为圆面积，利用出入相补原理来推证圆面积公式(1-3-1)。刘徽说此合周三径一，不严谨。为了证明此式，刘徽创造了割圆术。他从圆内接正六边形开始割圆，依次得到圆内接正 $6\times2, 6\times2^2, \cdots\cdots$ 边形。设圆内接正 6×2^n 边形的面积为 S_n，则 $S_n<S$。而“割之弥细，所失弥少。割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣”，即分割次数越来越多，$S-S_n$ 越来越小，到不可再割时，S_n 与 S 重合，亦即 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$。刘徽认为，圆内接正 6×2^n 边形的每边和圆周之间有一段余径 r_n。将 6×2^n 边形的每边 a_n 乘余径 r_n，其总和是 $2(S_{n+1}-S_n)$。将它加到 S_n 上，则有 $S<S_n+2(S_{n+1}-S_n)$，如图 1-29 所示。然而当 n 无限大，6×2^n 边形与圆周合体时，有 $\lim\limits_{n\to\infty}r_n=0$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}[S_n+2(S_{n+1}-S_n)]=S$。然后，刘徽说：“以一面乘半径，觚而裁之，每辄自倍。故以半周乘半径而为圆幂。”就是把与圆周合体的正多边形分割成无穷多个以圆心为顶点，以每边长为底的小等腰三角形。以圆半径乘这个多边形的边长是每个小等腰三角形面积的 2 倍。而所有这些小等腰三角形的底边之和就是圆周长，所有这些小等腰三角形面积的总和就是圆的面积。那么，圆半径乘圆周长，就是圆面积的 2 倍。那么一个圆面积就是(1-3-1)式。

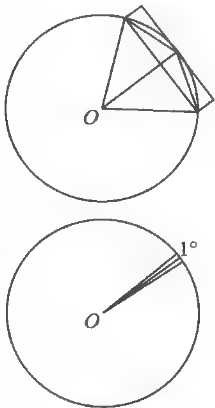


图 1-29　割圆术

(2)刘徽原理

刘徽在记述了用棋验法对长、宽、高相等的阳马、鳖臑的体积公式进行推导之后指出：在 $a\neq b\neq h$ 的情况下，一个长方体分割出的 3 个阳马不全等，所分割出的 6 个鳖臑的形状也不同，“则难为之矣”。刘徽另辟蹊径，首先提出了一个原理：“邪解堑堵，其一为阳马，一为鳖臑。阳马居二，鳖臑居一，不易之率也。”设阳马体积为 $V_{阳马}$，鳖臑体积为 $V_{鳖臑}$，刘徽认为，在一个堑堵中，恒有：

$$V_{阳马}:V_{鳖臑}=2:1 \tag{1-3-4}$$

吴文俊把它称为刘徽原理。显然，只要证明了刘徽原理，由堑堵的体积公式，则(1-3-2)、(1-3-3)两式是不言而喻的。

刘徽将由两个小堑堵Ⅱ′、Ⅲ′，两个小鳖臑Ⅳ′、Ⅴ′合成的鳖臑与由一个小长

方体Ⅰ，两个小堑堵Ⅱ、Ⅲ，两个小阳马Ⅳ、Ⅴ合成的阳马拼合成一个堑堵，如图1-30所示。显然，小堑堵Ⅱ与Ⅱ′、Ⅲ与Ⅲ′可以分别拼合成与Ⅰ全等的小长方体，小阳马Ⅳ与小鳖臑Ⅳ′，小阳马Ⅴ与小鳖臑Ⅴ′可以分别拼合成两个与小堑堵Ⅱ、Ⅲ、Ⅱ′、Ⅲ′全等的小堑堵，它们又可以拼合成与Ⅰ全等的第4个小长方体。显然，在前三个小长方体Ⅰ、Ⅱ-Ⅱ′、Ⅲ-Ⅲ′中，属于阳马的和属于鳖臑的体积的比是2∶1，所谓“每二分鳖臑，则一阳马也”，即在原堑堵的$\frac{3}{4}$中(1-3-4)式成立，所谓“别种而方者率居三”。而第4个小长方体中的两个小堑堵与原堑堵完全相似，所谓“通其体而方者率居一”。刘徽认为，“余数具而可知者有一、二分之别，即一、二之为率定矣”。而“若为数而穷之，置余广、袤、高之数各半之，则四分之三又可知也”，即上述分割过程完全可以继续下去，又可以证明(1-3-4)式在其中的$\frac{3}{4}$中成立，在其中的$\frac{1}{4}$中尚未知。“半之弥少，其余弥细，至细曰微，微则无形，由是言之，安取余哉?”将这个过程无限继续下去，第n次分割后只剩原堑堵的$\frac{1}{4^n}$中(1-3-4)式是否成立尚未知。

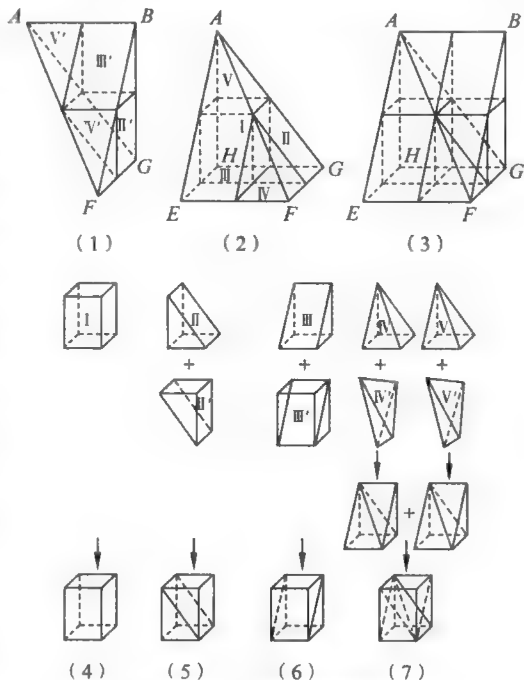


图1-30　证明刘徽原理

由于$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{4^n}=0$，这就在整个堑堵中证明了刘徽原理成立。

然后，刘徽说：“不有鳖臑，无以审阳马之数，不有阳马，无以知锥亭之类，功实之主也。”换言之，鳖臑是刘徽解决多面体体积问题的关键。就是说，刘徽把多面体体积理论建立在无穷小分割基础上。这种思想符合现代的体积理论。高斯提出了多面体体积的解决不借助于无穷小分割是不可能的的猜想。希尔伯特(1862—1943)以这个猜想为基础在1900年提出了《数学问题》的第三问题。不久，德恩(1878—1952)给出了肯定的答复。

(3)圆体体积与祖暅之原理

中国古代处理圆柱、圆锥、圆亭以及球等圆体体积，主要借助于截面积原理，

亦即祖暅之原理,西方称作卡瓦列利(1598—1647)原理。祖暅之原理有一个发展过程。实际上,《数》、《算数书》和《九章算术》的圆体的体积公式是通过比较圆体与相应的方体的底面积得到的。

刘徽在羡除术中提出“推此上连无成不方,故方锥与阳马同实。”这是说:同底等高的方锥与阳马没有一层不是相等的方形,所以它们的体积才相等,类似于卡瓦列利的不可分量。祖暅之继承了刘徽的思想,将其概括为:“夫叠棋成立积,缘幂势既同,则积不容异。”就是说,两立体若它们任意等高处的截面积相等,则它们的体积不能不相等。这就是祖暅之原理。

祖暅之利用这个原理求出了刘徽设计的牟合方盖的体积。刘徽为解决球体积,取两个相等的圆柱体使之正交,其公共部分称作牟合方盖,如图 1-31 所示。设牟合方盖的体积为 $V_{方盖}$,刘徽指出:“合盖者,方率也;丸居其中,即圆率也。”即 $V_{球}:V_{方盖}=\pi:4$。显然,只要求出牟合方盖的体积,便可求出球的体积公式。

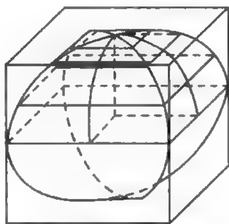


图 1-31 牟合方盖

根据李淳风等《九章算术注释》,祖暅之求牟合方盖体积的方法是:如图 1-32 所示,祖暅之考虑立方的 $\frac{1}{8}$ 即 $ABCDEFGO$,其内切牟合方盖的 $\frac{1}{8}$ 为内棋 $AEFGO$,正方体与牟合方盖之间的部分在切割出牟合方盖时被切割成外三棋:$ADEF$,$ABGF$,$ABCDF$。用一平面在高 OA 上任一点 N 处横截 $ABCDEFGO$,得截面 $IJKN$。设 $ON=a$,则其截面 $IJKN$ 的面积为球半径之平方 r^2。内棋的截面为正方形 $NMHL$,设其面积为 b^2,那么,外三棋的截面,即 $LHQK$,$MIPH$ 和 $HPJQ$ 的面积之和应为 r^2-b^2。而由勾股形 ONM,$r^2-b^2=a^2$。而 a^2 等于一个长、宽、高相等的阳马距顶点为 a 处的横截面积。由祖暅之原理,外三棋的体积之和与其长、宽、高为球半径 r 的阳马的体积相等,即等于小立方的 $\frac{1}{3}$。因此,内棋的体积是小立方的 $\frac{2}{3}$。这就证明了牟合方盖的体积是其外切正方体体积的 $\frac{2}{3}$。

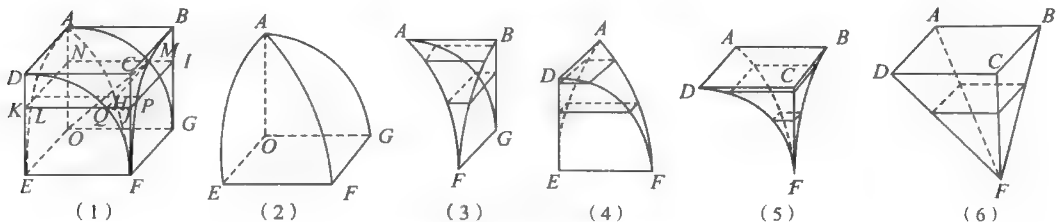


图 1-32 求牟合方盖的体积

(4)极限思想在近似计算中的应用

刘徽将极限思想用于求圆周率、弧田面积密率的计算,以及开方不尽求微数。这里仅介绍刘徽求圆周率的程序和求微数。

刘徽在证明了《九章算术》的圆田术(1-3-1)之后指出:在这个公式中的周、径之比应该是"至然之数"而不是周三径一。刘徽因而创造计算圆周率精确近似值的方法。他取直径为 2 尺的圆,其内接正六边形的边长为 1 尺。仍从正 6 边形开始不断地割圆,利用勾股定理、开方术及开方不尽求微数的方法,求出正 6×2^n 边形($n=0,1,2,3,4,5$)的边长、边心距、余径,最后求出正 96 边形的面积 $S_4=313\frac{584}{625}$、一边长 65 438 和正 192 边形的面积 $S_5=314\frac{64}{625}$,差幂 $S_5-S_4=\frac{105}{625}$寸^2。那么 $S_4+2(S_5-S_4)=314\frac{169}{625}$寸$^2>S$,于是 $314\frac{64}{625}$寸$^2<S<314\frac{169}{625}$寸^2。刘徽便取 314 寸^2 作为圆面积的近似值。将其代入(1-3-1)式,求出圆周长 $l\approx6$ 尺 2 寸 8 分。刘徽将直径 $d=2$ 尺与周长 $l\approx6$ 尺 2 寸 8 分相约,周长得 157,直径得 50,这就是圆周率。用现今的符号,就是 $\pi=\frac{157}{50}$,后来常称为徽术或徽率。刘徽指出,其中"周率犹为微少也",他又求出正 1 536 边形的一边长,算出正 3 072 边形的面积,裁去微分,求出圆周长近似值 6 尺 2 寸 $8\frac{8}{25}$分,与直径 2 尺相约,周得 3 927,径得 1 250,为周周率,即 $\pi=\frac{3\,927}{1\,250}$。刘徽关于圆周率的计算赶上并超过了古希腊的阿基米德,奠定了此后中国在圆周率计算方面领先于世界数坛千余年的理论和数学方法的基础。

据《隋书·律历志》记载,祖冲之求出了相当于 $3.141\,592\,6<\pi<3.141\,592\,7$ 的圆周率,密率:$\pi=\frac{355}{113}$。前者直到 1247 年才被中亚数学家阿尔·卡西所超过。而后者于 1573 年才被德国数学家奥托重新发现。日本学者三上义夫建议将其称为祖率。祖冲之的方法,史书没有记载。一般认为,他是利用刘徽的程序,计算到正 6×2^{11} 边形的面积求出的。

开方不尽求微数,是刘徽另一项近似计算。他说:

不以面命之,加定法如前,求其微数。微数无名者以为分子,其一退以十为母,其再退以百为母。退之弥下,其分弥细,则朱幂虽有所弃之数,不足言之也。

这是以十进分数逼近无理根,与我们今天计算无理根的十进分数的近似值的方法完全一致。刘徽求圆周率的程序要多次求微数。

6. 刘徽的逻辑思想和数学理论体系

国内外许多学者都认为中国古代的数学成就只是经验的总结，没有推理，尤其是没有演绎推理。而笔者认为刘徽《九章算术注》主要使用了演绎逻辑。

(1)刘徽的数学定义

刘徽改变了《九章算术》对概念约定俗成的做法，给许多数学概念以明确的定义。他的定义多数是发生性定义，比如关于正负数的定义："今两算得失相反，要令正负以名之。"刘徽的定义基本上符合现代数学和逻辑学关于定义的要求。

(2)刘徽的演绎推理

刘徽在数学证明中有三段论、关系推理、假言推理、选言推理、联言推理、二难推理等演绎逻辑的最重要的推理形式，还有数学归纳法的雏形。以三段论为例。盈不足术刘徽注云："注云若两设有分者，齐其子，同其母。此问两设俱见零分，故齐其子，同其母。"其推理形式是：若两设有分者(M)，须齐其子，同其母(P)。此问(S)两设俱有分(M)，故此问(S)须齐其子，同其母(P)。完全符合三段论第一格AAA式的规则。

关系推理是三段论的一种，在刘徽的推理中所占的比重自然特别大，而以等量关系推理为最多。例如方田章圆田术刘徽注对圆田又术"周、径相乘，四而一"的证明是："周、径相乘各当以半，而今周、径两全，故两母相乘为四，以报除之。"其推理形式就是：已知 $S=\frac{1}{2}lr$(等量关系判断)及 $r=\frac{1}{2}d$(等量关系判断)，故 $S=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}l\times\frac{1}{2}d=\frac{1}{4}ld$(等量关系判断)。不过刘徽有时使用不等量关系，如刘徽在推断圆囷(圆柱体)与所容之丸(内切球)的体积之比不是 $4:\pi$ 时说："合盖者，方率也，丸居其中，即圆率也。推此言之，谓夫圆囷为方率，岂不阙哉？"其推理形式是：已知 $V_{盒盖}:V_{球}=4:\pi$(等量关系判断)及 $V_{圆囷}:V_{球}\neq V_{盒盖}:V_{球}$(不等量关系判断)，故 $V_{圆囷}:V_{球}\neq 4:\pi$(不等量关系判断)。

(3)刘徽的数学理论体系

有人说《九章算术》建立了中国古代的数学体系。但是《九章算术》既没有定义和论证，各命题之间除均输术是衰分术的子术之外也几乎看不出其逻辑关系，当时实际上存在的某些推导和论证，也是以归纳逻辑为主的。因此《九章算术》并没有建立中国古代数学的体系，只是构筑了中国传统数学的基本框架，刘徽才建立了数学理论体系。这个体系不是《九章算术》数学框架的简单继承和补充，而是对其的根本改造。近代人们常把数学画作一株大树，实际上，早在1700多年前，刘徽就提出了数学之树的思想。他说："事类相推，各有攸归，故枝条虽分而同本

知，发其一端而已。"刘徽又说："以法相传，亦犹规矩度量可得而共。"这道出了刘徽数学之树的根，也形象地概括了中国传统数学中数与形相结合，几何问题与算术、代数问题相结合的重要特点。

中国传统数学的高潮——唐中叶至元中叶的数学

1. 唐中叶至元中叶数学概论

(1)传统数学的高潮与唐中叶开始的社会变革

宋元时期中国传统数学达到第三个高峰。唐中叶至北宋初年，中国社会发生了若干重大变革。土地可以自由买卖，土地的商品化取代了土地国有制。门阀世族及其部曲佃客制度完全瓦解，被租佃制代替。同时，儒家的统治地位遭到削弱，虽产生了程朱理学，但还没有占据思想界的统治地位，思想界还相对宽松。这都推动了数学和科学技术的发展。指南针用于航海，火药用于军事，印刷术用于印刷文史和数学经典都始于五代和北宋。北宋王朝比较重视数学，1084 年秘书省刊刻了十部汉唐算经，图 1-33 是南宋翻刻本书影。这分别是世界上首次出现及现存最早的印刷本数学著作。



图 1-33　宋刻汉唐算经

在这种社会背景下，中国的筹算数学发展迅速。11 世纪上半叶在汴京（今开封）有一个以楚衍、贾宪为代表的数学中心，13 世纪下半叶更同时出现了长江下游和太行山两侧南北两个数学中心，元统一中国后，朱世杰综合这两个中心的长处，将筹算数学推向最高峰。当时出现了一系列欧洲近代才达到的重大成果。如最迟在 13 世纪有了完整的十进小数记法，而欧洲在 1585 年斯台文才在运算中使用小数；贾宪创造的贾宪三角，西方同类的帕斯卡三角晚出五六百年；贾宪的增乘开方法，欧洲 19 世纪初鲁菲尼、霍纳才有同类的成果；秦九韶总结的大衍总数术即一次同余方程组解法，近代数学大师欧拉（1707—1783）、高斯才达到其水平；朱世杰的四元术即多元高次方程组解法，别朱（1775）才有同类的方法；朱世杰的高次招差法公式，欧洲直到格利高里（1670）、牛顿（1676）才得到。

宋元时期的数学发展有一些与过去不同的特点。首先是追求简捷运算，出现算法歌诀，并导致最迟在南宋发明了珠算盘。其次是开展专题研究，出现以某一课题为研究对象的专门性著作。第三，对开方术的研究受到空前重视。第四，出现纯数学研究的著作。第五，重视有关军事的数学问题。第六，探讨数学与道的关系，秦九韶、李冶都有精辟论述。第七，开始完整的数学教学计划的制订，如南

宋杨辉的“习算纲目”。

(2)贾宪和《黄帝九章算经细草》

贾宪的生平不详，著有《黄帝九章算经细草》9卷和《算法学古集》2卷。前者因被作为杨辉《详解九章算法》的底本而尚存约三分之二，后者已失传。《黄帝九章算经细草》大约成书于11世纪30年代初之前。贾宪对宋元数学的发展影响极大。

《黄帝九章算经细草》的数学成就主要有：提出立成释锁法，创造“开方作法本源”即贾宪三角，创造增乘开方法，将开方法推广到任意高次。追求数学方法更强的程序化、机械化，有更高的抽象性，是贾宪数学思想的重要方面。

(3)秦九韶和《数书九章》

秦九韶(1208—约1261)，字道古，自称鲁郡(今山东省)人，生于普州安岳(今四川省)。青年时他“尝从隐君子受数学”，时人称他“性极机巧”，“星象、音律、算术以至营造之事，无不精究”，于1247年完成《数书九章》。他主张“数术之传，以实为体”，认为“数与道非二本”。他关心国计民生，主张“施仁政”。他因追随抗战派吴潜，1260年受贾似道迫害，贬于梅州，次年病逝。

《数书九章》，18卷，本名《数术》，又称《数学九章》，分成大衍、天时、田域、测望、赋役、钱谷、营建、军旅、市易9类，每类有9题。提出大衍总数术，系统解决了一次同余方程组解法；又提出正负开方术，把以增乘开方法为主导的求高次方程的正根的方法发展到十分完备的程度。

(4)李冶和《测圆海镜》、《益古演段》

李冶(1192—1279)，字仁卿，号敬斋，真定栾城(今河北省)人，金元数学家、历史学家。李冶自幼爱好数学，青年时便被视为“经为通儒，文为名家”。金亡后隐居于今山西北部，栖身道观，过着馇粥不继的生活，却潜心研究数学与其他学问，其思想深受老庄和道教影响。他在道观得到“洞渊九容”，又加阐发，以天元术为主要方法，于1248年著《测圆海镜》。1251年，李冶到元氏县主持封龙山书院。1259年写成《益古演段》。1260年8月，忽必烈授李冶为翰林学士、同修国史，就职甫一年，不愿做御用文人而辞职归山。李冶还著有《敬斋古今黈》40卷等著作。

《测圆海镜》研究圆及与之有各种相切关系的勾股形，集金元之前中国勾股容圆知识之大成。同时，由于《测圆海镜》前的关于天元术的著述全部亡佚，遂成为关于天元术最早的、最重要的第一手资料。其卷一之首为“圆城图式”，绘出16个勾股形与同一个圆的各种相切关系。其“识别杂记”阐明了各勾股形边长及其与圆径的关系，包含了全书解题所需的基本理论。卷二到十二为170个问题，都是已知某些勾股形的边长，求圆径，其提问、答案都相同。卷二前10问的“法”根据

勾股形与圆的10种相切关系给出了求圆径的公式。自卷二最后一问之后所有问题的"草"都是利用天元术列出一元方程。

《益古演段》3卷，在北宋蒋周《益古集》基础上，使用天元术根据方田与圆田的不同关系列出一元一次或二次方程，64问。有24处引用"旧术"，当是《益古集》原有的方法。

(5)杨辉和《详解九章算法》、《杨辉算法》

杨辉，字谦光，钱塘(今杭州)人，南宋数学家和数学教育家。生平不详，时人评价他"以廉饬己，以儒饰吏"。他注意收集数学问题，先后完成数学著作5种21卷。

《详解九章算法》12卷，1261年撰。杨辉以北宋贾宪《黄帝九章算经细草》9卷为底本，取其中80题作为矜式，撰解题、比类、详解、注释等，其余166题则照录，并在其前补充图、乘除二卷，在其后补充纂类一卷而成。因此，《详解九章算法》含有《九章算术》本文、刘徽注、李淳风等注释、贾宪细草和杨辉详解5种内容。今存衰分章的异乘同除类、少广章(以上存《永乐大典》残本中)、商功章约半卷、均输、盈不足、方程、勾股、纂类(以上见《宜稼堂丛书》本)，约占全书的三分之二。杨辉在商功章的比类中，以各种垛积比类多面体，扩展了二阶等差级数的应用。在纂类中指出了《九章算术》分类的弊病，根据贾宪细草将《九章算术》按数学方法重新分类，第一次突破"九数"的格局。

《日用算法》2卷，1262年撰，已亡佚，只有少数内容传世。

《杨辉算法》7卷，包括《乘除通变本末》3卷(1274年)、《田亩比类乘除捷法》2卷(1275年)、《续古摘奇算法》2卷(1275年)。《乘除通变本末》的"习算纲目"是一个数学教学大纲，其他部分给出了垛积及重因、损乘、身外加减、求一、九归等乘除捷法。《田亩比类乘除捷法》有田亩问题和乘除捷法两个主题，保存了刘益《议古根源》的部分问题和开方法。卷下纠正了《五曹算纪》的某些错误。《续古摘奇算法》内容杂芜，其卷上主要论述纵横图，卷下的海岛图当为刘徽重差图之幸存者，殊为宝贵。

(6)朱世杰和《算学启蒙》、《四元玉鉴》

朱世杰，字汉卿，号松庭，寓居燕山(今北京附近)，生卒年代不可考。他在元统一中国之后以数学名家周游湖海二十余年，综合此前北南两个数学中心的长处，做了创造性的发展，著有《算学启蒙》、《四元玉鉴》，先后于1299年、1303年刊于扬州。后者是中国古代的数学经典。朱世杰还是一位成功的数学教师，时人称"四方之来学者日众"、"踵门而学者云集"。

《算学启蒙》卷首为数学预备知识。正文3卷，20门，259问，包括筹算四则运算、比例算法、面积与体积计算、盈不足术、方程术以及垛积术、天元术和增乘开方法。

卷上的留头乘法、撞归法和起一法都是第一次记载，说明筹算捷算法已基本完成。内容的编排由浅入深，循序渐进，确是一部算学入门的上乘之作。

《四元玉鉴》，卷首包括梯法七乘方图（即增乘开方法图）、古法七乘方图（改进了的贾宪三角）以及天元术、二元术、三元术和四元术的细草假令之图，运用四元消法将二元、三元和四元的高次方程组消元成为一元高次方程以求解，是全书的纲领。正文 3 卷，24 门，284 问，运用天元术、二元术、三元术、四元术解决，含有垛积术与招差术系统内容，将其发展到前所未有的高度。

此外，对数学做出贡献的还有沈括、王洵、郭守敬、赵友钦等。

2. 计算技术的改进和珠算的发明

(1) ○和十进小数

宋元时期人们开始以○表示 0，它是什么时候产生的，没有确凿的资料。古代人们常用□表示缺字，于是便用其表示空位，后来逐渐变成○号。现存资料中○号的最早应用在金朝《大明历》中，秦九韶、李冶在其数学著作中已多次使用○。

唐中叶之后，开始用算筹数码记数，为了书写方便，逐步发展成为一套新的记数符号：

纵式　　| || ||| X ō T Π Ⅲ X ○

横式　　一 二 三 X ȯ ⊥ ⊥ ⊥ X ○

随着珠算的发明，已无纵横的区别。这套记数法进一步发展，逐渐形成了一式的数码：

〡 〢 〣 〤 〥 〦 〧 〨 〩 〇

这就是沿用到 20 世纪上半叶的苏州码子。

《孙子算经》有“三十七丁五分”，其“五分”就是 0.5，有十进小数概念。十进小数的产生主要应归功于非十进单位的换算。端与尺寸、斤与两等非十进制的运算不那么方便，唐中叶之后运算日益增多并要求运算快，将其化成十进小数，成为迫切需要。人们将化非十进制度量单位为十进小数的算法编成歌诀，就是“化零歌”。

十进小数的记法各式各样，除《孙子算经》那种外，都以位值制表示小数。在无整数部分时则在整数处标以○。对有整数部分者，或在个位数后写出小数部分，或在整数部分的个位下加单位名称。1585 年，比利时的斯台文才确定十进小数的记法和运算法则，但其记法很不方便。

斤两法是唐中叶创造的将衡制中的以“两”为单位的数量化为以“斤”为单位的十进小数的歌诀。《算学启蒙·总括》中的“斤下留法”歌诀与现今的歌诀十分接近，比如将 1 两化成斤，便是“一退六二五”，即 0.062 5 斤。

(2)计算技术的改进

北宋沈括说:"算术不患多学,见简即用,见繁即变,不胶一法,乃为通术也。"概括了唐中叶以后简化算法的指导思想。人们改进筹算的乘除法,主要在两个方面,一是化三行布算为一行布算,一是化乘除为加减。《夏侯阳算经》的"重因"就是将乘数化成几个个位数因子,可以将乘法由三行布算变为在一行中完成,《杨辉算法》又有所改进。"身外加减法"是唐中叶以来当乘除数首位是1时人们创造的用加减代替乘除的方法。杨辉在《乘除通变本末》做了系统总结,提出加法五术和减法四术。然而在实际问题中,乘数或除数的首位不一定是"1",为了将其首位化为"1",人们创造了"求一法"。唐宋元出现了许多关于求一法的著作,现在有传本的著作有杨辉的《乘除通变本末》等,并编成歌诀。

留头乘法亦称"穿心乘",是元代创造的三位以上的乘数的一种乘法方式,因将乘数首位留至最后再与被乘数相乘而得名。起于筹算,用于珠算,初见于元朱世杰《算学启蒙》卷上。

"归"是一位除法,"九归"就是从1至9的一位除数的除法。如果被除数的首位是1,用9除时只需在下位加1,用8除加2,用7除加3,依此类推。杨辉在《乘除通变本末》卷中总结出"九归新括"。朱世杰《算学启蒙·总括》的九归口诀与现今使用的珠算口诀基本一致。"三一三十一"就是以3除10商3余1。归除是元明时期创造的除数在两位以上时的除法口诀,起于筹算,后来用于珠算。后来还创造了撞归法,有撞归口诀。

(3)珠算的产生

筹算乘除捷算法的产生、发展及各种歌诀的出现,使口念歌诀很快,而手摆算筹很慢,得心无法应手。珠算和珠算盘便应运而生。但是珠算是什么时候产生的尚无定论。不过到宋代,珠算产生的算法条件已经完全成熟了。南宋刘胜年绘的《茗园赌市图》中有珠算盘,见图1-34。可见珠算最迟在南宋已经产生,并在民间广泛使用。珠算盘产生后,与算筹并用了很长的时间。大约在明中叶以后,珠算盘完全取代了算筹,完成了计算工具的改革。

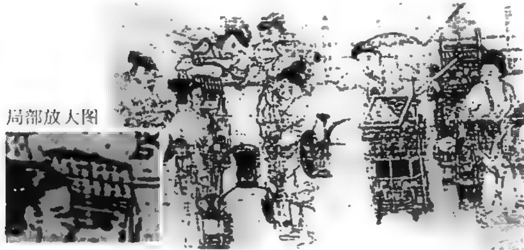


图1-34 刘胜年《茗园赌市图》

3. 勾股容圆

宋金时期,洞渊在《九章算术》勾股章勾股容圆基础上研究了同一个圆和各种勾股形的相切关系,给出了由勾股形的三边求圆径的9个公式,称为"洞渊九容"。

(1)洞渊九容

《测圆海镜》卷二阐述了10种容圆的圆径公式，除《九章算术》的勾股容圆公式外，还有：勾上容圆 $d=\frac{2ab}{b+c}$，股上容圆 $d=\frac{2ab}{a+c}$，勾股上容圆 $d=\frac{2ab}{c}$，弦上容圆 $d=\frac{2ab}{a+b}$，勾外容圆 $d=\frac{2ab}{c+(b-a)}$，股外容圆 $d=\frac{2ab}{c-(b-a)}$，弦外容圆 $d=\frac{2ab}{(a+b)-c}$，勾外容圆半 $d=\frac{2ab}{c-a}$，股外容圆半 $d=\frac{2ab}{c-b}$。"洞渊九容"是指哪9个公式，自清末以来众说纷纭，至今没有定论。

(2)圆城图式和识别杂记

《测圆海镜》卷一由圆城图式、识别杂记等部分组成。圆城图式见图1-35，是用纵横分别平行的4条线将勾股形天地乾分割成14个勾股形，连同其本身及弦外1个，共16个。其不同者有13个，李冶称之为"十三率勾股形"。用天、地、乾、坤等汉字表示点，也是圆城图式的创造。

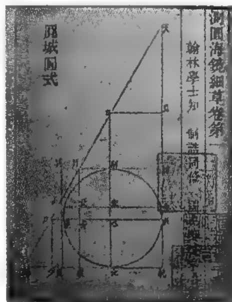


图1-35　圆城图式

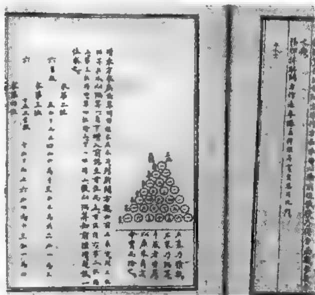
"识别杂记"共692条命题，每条可看作一个公式或定义，阐明了诸勾股形各边及其和、差、积与圆径的关系，除8条外都是正确的。这是对中国古代关于勾股容圆问题的全面总结。洞渊九容中的其他公式，以及后面各卷算题的解法，均可由识别杂记推出。

4. **高次方程数值解法**

(1)立成释锁法与贾宪三角

贾宪汲取了刘徽等对《九章算术》开方术的改进，提出立成释锁法。"释锁"就是开方，将开方比喻为打开一把锁。"立成"是唐宋历算学家将一些常数列成的算表。因此，立成释锁法就是借助一个常数表进行开方的方法。

立成释锁法中的"立成"就是贾宪三角，原名"开方作法本源"，又称"释锁求廉本源"，见图1-36。它是整次幂二项式 $(a+b)^n(n=0,1,2,3,\cdots)$ 的展开式的系数自上而下摆成的等腰三角形的数表。贾宪三角最外左右斜线上的数字，分别是二项式 $(a+b)^n(n=0,1,2,3,\cdots)$ 展开式中 a^n 和 b^n 的系数，中间的数"2"，"3，3"，"4，6，4"，……分别是各廉。虽然贾宪只给出了立成释锁平方法、立方法的程序，但是，贾宪三角的提出说明他已经能开任意高次方，这是一个突破。贾宪三角之后附有造表法，这是


图1-36　贾宪三角

求二项式展开式各廉即贾宪三角各层的普遍方法。

(2)增乘开方法

创造增乘开方法是宋元时期开方术的重大进展。贾宪创造的增乘开方法，又称为递增某乘开方法，朱世杰称为“梯法开方法”。今以贾宪的递增三乘开方法（即开 4 次方）为例说明增乘开方法。贾宪给出的方法是：

递增三乘开方法曰：置积为实。别置一算，名曰下法。于实末常超三位，约实。上商得数。乘下法，生下廉。乘下廉，生上廉。乘上廉，生立方。命上商，除实。作法商第二位得数。以上商乘下法入下廉。乘下廉入上廉，乘上廉入方。又乘下法入下廉。乘下廉入上廉。又乘下法入下廉。方一、上廉二、下廉三、下法四退。又于上商之次续商置得数。以乘下法入廉。乘下廉入上廉。乘上廉，并为立方。命上商，除实，尽，得三乘方一面之数。

它的关键是在求得根的某一位得数后，如果需要继续开方，便以商的该位得数自下而上递乘递加，每低一位而止，以求减根方程。它比立成释锁法更加程序化、机械化。增乘开方法把中国开方术的研究推进到一个新的阶段。

谨以贾宪求 $x^4=1\ 336\ 336$ 的正根为例说明开四次方程序：

	(1)		(2)		(3)
商		商		商	3
实	1 3 3 6 3 3 6	实	1 3 3 6 3 3 6	实	5 2 6 3 3 6
方		方		方	2 7
上廉		下廉		下廉	9
下廉		上廉		上廉	3
下法	1	下法	1	下法	1

	(4)		(5)		(6)
商	3	商	3	商	3 4
实	5 2 6 3 3 6	实	5 2 6 3 3 6	实	
方	1 0 8	方	1 0 8	方	1 3 1 5 8 4
上廉	5 4	下廉	5 4	下廉	5 8 9 6
下廉	1 2	上廉	1 2	上廉	1 2 4
下法	1	下法	1	下法	1

(3)正负开方术

刘益在祖冲之之后又引入负系数方程，并提出了益积开方术和减从开方术及其细草。此后一百多年间的数学著作基本失传。增乘开方法是秦九韶、李冶、杨辉、朱世杰等的著作的重要内容，求高次方程正根的方法，已经发展到十分完备的境地。

《数书九章》有 32 个开方式，有的方程高达 10 次。在田域类“尖田求积”问的筹式细草“正负开三乘方图”之后，秦九韶说“后篇效此”，说明这是一个普遍方法。有几个问题值得注意：首先，秦九韶规定“实常为负”，可以将随乘随加的运算进行到底。其次，秦九韶提出“以方约实”的估根方法。在现有资料中这在中国数学史上是第一次。再次，对开方过程中有时会出现的两种特殊情形：一是在开方过程中常数项由负变正，二是在开方过程中常数项的符号不变，仍然为负，但是有时其绝对值变得更大，秦九韶都提出了处理方法。第四，关于无理根的近似值，秦九韶既有传统的表示法，也使用刘徽的开方不尽求“微数”的方法。第五，建立开方式过程中遇到系数是无理数时，进行了有理化处理。

李冶、朱世杰对开方中出现的特殊情形也提出了处理方法。

《数书九章》卷五“三斜求积”问是一个已知三角形的三边求其面积的问题，秦九韶说其面积 S 由开方式 $S=\sqrt{\frac{1}{4}[a^2b^2-(\frac{a^2+b^2-c^2}{2})^2]}$ 求出。通过因式分解，上式可以化成：$S=\sqrt{\frac{a+b+c}{2}\times\frac{a+b-c}{2}\times\frac{a-b+c}{2}\times\frac{b+c-a}{2}}$，与古希腊的海伦公式暗合。

5. **天元术和四元术**

宋元时期发展出一种半符号代数学，这就是天元术与四元术。

(1)天元术

天元术是宋元时期发展起来的设未知数列方程的方法。天元术含有三个步骤，一是立天元一为某某，相当于现今之设未知数某某为 x；二是根据问题的条件列出两个等价的天元多项式；最后，两者如积相消，得到一个开方式，即一元方程。

关于天元术的发展史，许多情况仍然扑朔迷离。元祖颐在《四元玉鉴后序》中说元裕为刘汝谐的《如积释锁》撰细草，“后人始知有天元也”。李冶在东平看到一部算书，用 19 个汉字表示未知数的各次幂，正幂在上；负幂在下，而以人为太极表常数项。后来的算书简化为用一个字“天”记正幂，在上；“地”记负幂，在下。太原的彭泽彦材受《周易》八卦“乾在下，坤在上，二气相交而为太”思想的影响，改为天元在下。这样与开方式高次幂在下一致。再后来，人们取消了表示未知数的负幂的地元，只用“天元”，借助于位值制既可表示未知数的正幂，又可表示未知数的负幂，还可以表示常数项。开始仍采取正幂在上，负幂在下，元沙克什的《河防通议》(源于 13 世纪初之前的金都水监本)、李冶的《测圆海镜》都是这样。不久，人们又将其颠倒过来，采取正幂在下、负幂在上的方式，李冶的《益古演段》及其后的著作都是这样，是天元式的标准表示方式。

天元式是多项式，自清中叶以来人们将其与开方式(即方程)混同，是以讹传讹。

在使用天元术推导方程的过程中，必然要进行多项式的四则运算。天元式的运算与现在的多项式类似。天元式的加减，是同次幂的系数相加或相减。常数乘天元式是用常数乘天元式的各项系数。用天元或天元幂乘除天元式，将其中的"元"字(或"右"字)上下移动相应的层数即可。两个天元式相乘，就是用一个天元式的各项分别乘另一天元式的各项，然后合并同类项。多项式除多项式是不能进行的，便采用寄分母的方法，而在求另一等价天元式时，以该分母乘之，两个天元式同分母，将两分子如积相消，得到开方式。

(2)四元术

四元术是二元、三元或四元的高次方程组的表示、建立与求解方法。天元术出现之后，二元术、三元术、四元术相继出现。祖颐《四元玉鉴后序》说：在天元术产生之后，李德载撰《两仪群英集臻》，创造二元术；刘大鉴撰《乾坤括囊》，创造三元术；朱世杰"演数有年，探三才之赜，索《九章》之隐，按天地人物立成四元，以元气居中"，创造四元术。《四元玉鉴》是现存关于四元术内容最为丰富的著作。其中二元者 36 题，三元者 13 题，四元者 7 题。卷首列"四象细草假令之图"，其一气混元、两仪化元、三才运元、四象会元四题提供了一元高次方程及二元、三元、四元高次方程组的表示法、建立方程组与四元消法的主要步骤。

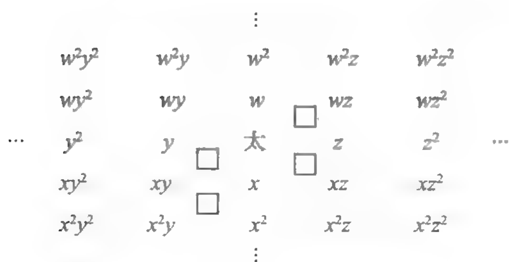


图 1-37　四元术表示法

四元术的表示法如图 1-37 所示。常数项"太"居中，以 x,y,z,w 分别表示天、地、人、物四元，分别位于"太"的下、左、右、上方，其幂次由与"太"的距离确定，距离越远，幂次越高。各未知数及其幂次的乘积位于相应行列的交叉点上。不相邻的未知数及其幂次之积置于相应的夹缝中。

四元术的关键是四元消法。按照"四象细草假令之图"，它分为"剔而消之"、"互隐通分相消"与"内外行相乘相消"等三步。先将三元或四元方程组消为二元高次方程组，第二步将二元高次方程组消为二元一次方程组，第三步将上述二元一次方程组消为一元高次方程，然后用增乘开方法求解。

6. 垛积术、招差术

宋元时期手工业发达，生产了大量的坛子、罐子、瓶子等等，堆垛成各种多面体的形状。数学家们认识到，不能用《九章算术》的多面体求积公式求其个数，于

是产生了一个新的分支——垛积术（亦即高阶等差级数求和）以及反求的算法——招差术。

(1)垛积术

垛积术原称隙积术，开创者是北宋沈括。他指出《九章算术》没有求隙积的方法。隙积就是积之有隙者，如将一颗颗棋子、坛、罐等垒起来，如图 1-38 所示，像刍童的形状而有空隙。若用《九章算术》的刍童术求积，数值偏小，便提出了隙积术，实际上是一个二阶等差级数求和问题。

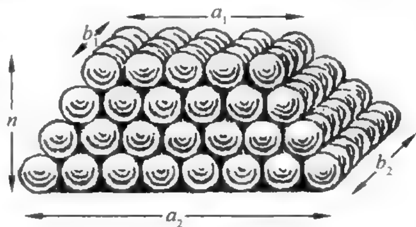


图 1-38　堆垛

南宋杨辉《详解九章算法》以各种果子垛比类《九章》的立体，称为垛积术。

朱世杰的《算学启蒙》、《四元玉鉴》反映了宋元时期垛积术研究的最高峰。《四元玉鉴》卷中有 33 题都含有已知高阶等差级数总和求其项数的问题。为了解决这些问题，需要按照各自的求和公式列出一个高次方程，然后用“正负开方术”求其根。在这些问题中，朱世杰提出了一系列三角垛公式，它们在书中似乎没有条理，但是，从它们前一个的前 n 项之和是后一个的第 n 项来看，它们在朱世杰的头脑中是形成了一个完整的体系的。各级数依次是贾宪三角第 2，3，4，5，6 条斜线上的数字，而其和恰恰是第 3，4，5，6，7 条斜线上的第 n 个数字。这就是为什么朱世杰用两组平行于左、右两斜的平行线将贾宪三角的各个数联结起来。可见，朱世杰已经掌握了三角垛的一般公式：

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{p!}r(r+1)(r+2)\cdots(r+p-1)=\frac{1}{(p+1)!}n(n+1)(n+2)\cdots(n+p)$$

朱世杰还解决了以四角垛之积为一般项的一系列高阶等差级数求和问题，以及峦峰形垛等更复杂的级数求和问题。

(2)招差术

郭守敬（1231—1316）、王恂（1235—1281）等元天算学家曾用招差术推算日、月的按日经行度数。朱世杰也把用招差术解决高阶等差级数求和问题发展到十分完备的程度。《四元玉鉴》“如象招数”门第 5 问附一问题：依立方招兵，初招方面三尺，次招方面转多一尺，得数为兵。今招一十五方，问招兵几何？

术曰：求得上差二十七、二差三十七、三差二十四、下差六。求兵者：今招为上积，又今招减一为菱草底子积为二积，又今招减二为三角底子积为三积，又今招减三为三角落一积为下积。以各差乘各积，四位并之，即招兵数也。

设日数为 n，$f(n)$为第 n 日共招兵数，术文给出求 $f(n)$相当于列出招差公式：

$$f(n)=n\Delta+\frac{1}{2!}n(n-1)\Delta^2+\frac{1}{3!}n(n-1)(n-2)\Delta^3+\frac{1}{4!}n(n-1)(n-2)(n-3)\Delta^4$$

其中 Δ 为上差，Δ^2 为二差，Δ^3 为三差，Δ^4 为四差。这一公式与现代通用形式完全一致。朱世杰指出招差公式的各项系数恰恰依次是各三角垛的积，这是他的突出贡献。

7. 大衍总数术与纵横图

(1)大衍总数术

秦九韶提出的“大衍总数术”，即今之一次同余方程组解法，实际上得出了定理：若 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是两两互素的正整数，$R_i<A_i$，R_i 也是正整数$(i=1,2,\cdots,n)$，正整数 N 满足同余方程组 $N\equiv R_i(\mathrm{mod}A_i)$，$i=1,2,\cdots,n$。如果能找到诸正整数 k_i，使

$$k_i(\prod_{j=1}^{n}A_j\div A_i)\equiv1(\mathrm{mod}A_i),\quad i=1,2,\cdots,n,$$

则

$$N\equiv\sum_{i=1}^{n}[R_ik_i(\prod_{j=1}^{n}A_j\div A_i)](\mathrm{mod}\prod_{j=1}^{n}A_j)。$$

高斯的《算术探究》(公元1801年)中明确写出了上述定理。

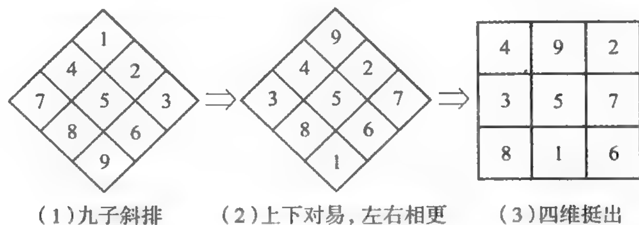
秦九韶将上述定理中的诸 k_i 叫作乘率，诸 A_i 叫作定数，$\prod_{j=1}^{n}A_j$ 叫作衍母，$\prod_{j=1}^{n}A_j\div A_i$ 叫衍数。而诸 A_i 必须是两两互素的正整数，但是在实际问题中诸 A_i 不一定互素，甚至不一定是整数。秦九韶针对不同的情况，提出了化约各种不同的问题为定数的程序。然而由两两不互素的元数求定数的方法，由于文字过于简括，其意义在学术界争论较大。

大衍总数术的核心是求乘率的大衍求一术，即求满足 $kg\equiv1(\mathrm{mod}A)$ 的 k。秦九韶称 g 为奇数。他的大衍求一术是：将 g 置于右上，A 置于右下，左上置天元一，g 与 A 辗转相除，商依次是 $q_1,q_2,\cdots$，余数是 $r_1,r_2,\cdots$，按一定规则在左下、左上计算 $c_1,c_2,\cdots$，直到右上 $r_n=1$ 为止(此时 n 必定是偶数)，则左上的 $c_n=q_nc_{n-1}+c_{n-2}$ 便是所求的 k 值。这里要计算到右上 $r_n=1$，故称为“求一”。可以证明，这种求乘率的方法是正确的。

(2)纵横图

纵横图亦称幻方。易纬《乾凿度》说：“太乙取其数以行九宫，四正四维皆合于十五。”甄鸾《数术记遗注》描绘说：“九宫者，二、四为肩，六、八为足，左三右七，戴九履一，五居中央。”宋儒将九宫数与河图、洛书联系起来。杨辉将“九宫数”称为纵横图，给出了其构造方法：“九子斜排，上下对易，左右相更，四维挺出。”如图1-

39 所示。杨辉等在《续古摘奇算法》卷上记录了大量的纵横图，给出了三阶、四阶纵横图的构造方法，表明这些图形的构造是有规律可循的。三阶纵横图是唯一的，但四阶以上的纵横图却有多种。



（1）九子斜排　（2）上下对易，左右相更　（3）四维挺出

图 1-39　纵横图

杨辉还正确地画出五阶至十阶纵横图，可见他已掌握了高阶纵横图的构成规律。对于 n 阶纵横图，他总结出求幻方的公式 $\frac{1}{2}n^2(n^2+1)$。把幻方和“以行数除之”，得幻和，即 $\frac{1}{2}n(n^2+1)$。

值得注意的是，杨辉之前，纵横图都是方形的。但杨辉等在百子图之后，给出各种形状的纵横图，从而开辟了纵横图研究的新领域。

西方数学的传入与中西数学的会通——明末至清末的数学

从元中叶到明末的 200 余年间，中国数学的研究方向发生了重大转变，宋元时期数学理论迅速发展的趋势开始减缓甚至停止了。明代的数学活动尽管很活跃，但数学家的关注点主要在为大众百姓提供实用的数学知识和方法上，数学歌诀十分流行，珠算得到普及，并最终取代了筹算，完成了计算工具的改革。而他们对宋元时期的大多重要成果根本不懂，汉唐宋元的重要数学著作和成果在明代基本失传。

16 世纪末西方初等数学传入中国，中国数学开始了中西的融会贯通，直到 20 世纪初中国传统数学中断，中国数学融入世界统一的现代数学。这大体可以分成三个阶段。

1. 西方初等数学的传入

明末至清雍正元年（1723 年）是西方初等数学传入的阶段。1582 年意大利传教士利玛窦来到中国。利玛窦与徐光启翻译《几何原本》前 6 卷（1607）、《测量法义》1 卷（1607—1608），与李之藻编译《圜容较义》（1608）和《同文算指》（1613）等著作。《几何原本》严谨的逻辑体系和演绎方法深受徐光启、李之藻等先进知识分子的推崇。《同文算指》系统介绍了西方的笔算，使笔算在中国逐渐得到推广。后

来徐光启主持编译了《崇祯历书》137卷(1629—1633),其数学内容为天文学服务,因此大多是关于几何学和三角学的内容,包括古希腊数学家阿基米德的求圆面积、圆周率、椭圆面积、球体积与椭圆旋转体体积等,德国数学家雷格蒙塔努斯的三角学,英国数学家纳皮尔的算筹和意大利科学家伽利略的比例规等。介绍西方三角学的著作还有邓玉函编译的《大测》(1631)、《割圆八线表》和罗雅谷的《测量全义》(1631)。穆尼阁、薛风祚编译的《比例对数表》1卷(1653)首次将对数介绍到中国。中国学者由此开始了中西数学会通的工作。

徐光启用《几何原本》的逻辑推理方法论证中国的勾股测望术,撰《测量异同》和《勾股义》,李笃培撰《中西数学图说》(1630),方中通撰《数度衍》(1661)等,都在不同程度上进行了会通。会通中西数学的杰出代表是梅文鼎(1633—1721),他认为"法有可采何论东西,理所当明何分新旧","务集众长以观其会同,毋拘名相而取其精粹",力主"去中西之见,以平心观理",坚信中国传统数学"必有精理"。他在《方程论》(1672)、《勾股举隅》和《少广拾遗》(1692)中分别对线性方程组解法、勾股形解法和高次方程求正根的方法进行了整理和研究,对许多"不详其理"的公式和定理进行证明。其《几何补编》讨论正多面体及半正多面体的性质和计算,《弧三角举要》、《环中黍尺》讨论球面三角,《堑堵测量》解释《授时历》的弧矢割圆术。他的数学天文著作由其孙梅瑴成编纂为《梅氏丛书辑要》23种60卷,其中数学著作13种40卷。与梅文鼎同时代的李子金撰《算法通义》(1676)、《几何易简集》(1679),杜知耕撰《数学钥》(1681),陈厚耀(1660—1722)撰《算义探奥》主要讨论几何问题,王锡阐在《圆解》中证明了两角和、差的正弦和余弦公式,年希尧的《视学》2卷(1729—1735)是最早介绍西方透视学的著作。中西会通的代表作之一是康熙皇帝御定的《数理精蕴》53卷(1723),上编5卷"立纲明体",其中包括《几何原本》3卷、《算法原本》1卷,下编40卷"分条致用",包括算术、代数、平面几何、平面三角、立体几何等初等数学,另附有数学用表4种8卷,是一部比较全面的初等数学著作,对清代的数学研究有一定影响。

康熙时代乃至整个清代"西学中源"说盛行,这当然是错误的,助长了在科学已经落后时还在自大的思潮,但对克服学习西算的抵触情绪还是有积极作用的。

2. 西方数学传入的中断及传统数学著作的整理

1723年至19世纪中叶是第二阶段,雍正皇帝将传教士除供职于钦天监的少数外,悉数赶到澳门,西方数学传入中断。此阶段中国人的主要数学活动有两个方面,一是消化此前传入的西方数学知识,二是整理传统数学著作。

(1)对西方数学的继续研究及创新

1761年梅瑴成在《赤水遗珍》中记载了法国传教士杜德美传入的"弧求正

弦”、“弧求正矢”和“圆径求周”三个无穷级数公式但没有证明，明安图积 30 余年研究心得，撰《割圆密率捷法》4 卷（1774），证明了这三个公式，还创造了“弧求通弦”、“弧求正矢”、“通弦求弧”、“正矢求弧”、“正弦求弧”、“正矢求弦”6 个新公式。此后董祐诚在《割圆连比例图解》2 卷（1819）中将明安图的 9 个公式概括为关于弧、弦、矢三者关系的 4 个公式，项名达又在《象数一原》6 卷（1837）中把董祐诚的 4 个公式概括为两个公式。戴煦著《对数简法》2 卷（1845）、《续对数简法》1 卷（1846）和《外切密率》4 卷（1852），前两书化简对数计算，将二项式定理的指数推广到任意有理数，得到对数函数的幂级数展开式，后一书补充了正切、余切、正割、余割四个幂级数公式。

（2）传统数学著作的整理和研究

1773 年，乾隆皇帝下诏编纂大型丛书《四库全书》，此后大批在社会上很难得见的汉唐算经《九章算术》、《海岛算经》、《孙子算经》、《张丘建算经》、《五曹算经》、《五经算术》、《缉古算经》、《夏侯阳算经》等，宋元算书《数书九章》、《测圆海镜》、《益古演段》、《算学启蒙》、《四元玉鉴》等被发现、整理出版，引起学者们的强烈兴趣，为他们提供了新的研究课题。18 世纪 70 年代后，校勘、研究新发现的古算书成为当时研究数学的学者的主要课题之一。戴震、李潢、沈钦裴、李锐、焦循、汪莱、罗士琳等在校勘古算经、复原古算方法等方面都做出了不同程度的贡献。《九章算术》、《海岛算经》、《缉古算经》、《测圆海镜》、《算学启蒙》、《四元玉鉴》都有几个校勘本或阐释本，对《数书九章》、《测圆海镜》等也有深入研究。到 18 世纪末，数学研究已经成为一种风尚。

清中叶的数学家在传统数学的研究中取得重大的成果，并开辟了新的研究方向。1799 年，焦循出版《加减乘除释》，以最基本的加、减、乘、除四则运算来重新阐释和归纳《九章算术》及《缉古算经》等其他传统数学著作中的数学方法，还利用抽象的甲、乙、丙、丁等设题，构成了一个以四则运算为基础的一般性的符号运算系统。李锐撰《开方说》，汪莱撰《衡斋算学》，以传统天元术对高次方程正根个数与方程系数的变化关系进行了研究并互相辨诘。李善兰于 1845 年著有《方圆阐幽》1 卷、《弧矢启秘》2 卷和《对数探源》2 卷，创造尖锥术，得出相当于幂函数定积分的公式，跨上了微积分殿堂的门槛。当然，这些工作与他们对此前传入的西方数学的研究有着密切的联系。他们的成果在时间上要晚于西方数学家的同类工作，但都是独立做出的，为不久之后顺利接受微积分等近代数学知识奠定了基础。

3. 近代数学的传入

1840 年的鸦片战争，帝国主义用坚船利炮打开了闭关锁国的清帝国的大门，自 19 世纪 50 年代起西方数学第二次传入。李善兰与传教士伟烈亚力翻译了罗

密士的《代微积拾级》18卷，是为微积分学传入中国之始，他们还翻译了《几何原本》后9卷、德·摩根的《代数学》13卷。李善兰与艾约瑟还翻译了《圆锥曲线说》3卷，华蘅芳与传教士傅兰雅翻译了《代数术》25卷、《微积溯源》8卷、《三角数理》12卷、《代数难题解法》16卷、《决疑数学》10卷等，后者是西方概率论传入中国之始。这一次数学知识传入的规模之大，内容之高深，学科之多，都远远超过第一次传入。李善兰、夏鸾翔、华蘅芳等数学家都开展了对这些内容的研究，取得了某些新的成果。

清朝后期统治集团中的开明人士倡导洋务运动，将数学知识看成富国强兵、抵御外侮的有力工具。他们设立同文馆，在其中开设算学馆，其他洋务学校也设立了算学科，上述翻译的著作和某些中国传统数学内容成为教材。20世纪初废科举，颁行癸卯学制（1903年）之后，中国传统数学中断，中国数学走上了融入世界统一的数学的进程。

有清一代，官方对数学教育之重视，知识分子对数学认识之高，数学家对数学研究之执着，出版数学著作之多，涉及的数学分支之广泛，远远超过历代任何一个王朝。虽然数学成果和数学水平已经远远超过宋元数学，但是与世界数学先进水平比较，差距却越来越大。明末清初，中国数学家开始接受西方的三角函数与对数知识的时候，仅差几十年；到19世纪50年代微积分介绍到中国的时候，差距已达100多年。不过，包括微积分在内的数学知识的广泛传播，人们对数学认识的提高，为中国数学在20世纪完成融入世界统一的数学的过程，准备了并不贫瘠的土壤。新文化运动之后中国现代数学正是在此数学土壤上发展起来的。

四、印度和阿拉伯数学



印度数学

印度历史上曾出现过强盛独立的王朝，如孔雀王朝（公元前 324—前 185）、笈多王朝（320—540），但总体而言，整个古代与中世纪的印度几乎不断地处于外族的侵扰之下。这种多民族的交替入侵，使古代的印度文化包括印度数学不可避免地呈现出多元化的复杂背景。另外，古代印度数学也受到其宗教的影响。比如，在修建祭坛的时候，最常用的三种形状是正方形、圆和半圆，但不管哪种形状，祭坛的面积必须相等。因此，印度人要学会作出与正方形等面积的圆，或两倍于正方形面积的圆，以便采用半圆形的祭坛。在设计这类规定形状的祭坛时，必须要懂得一些基本的几何知识和结论。

印度数学的发展可以划分为 3 个重要时期，首先是达罗毗荼人时期（约公元前 3000—前 1400），史称河谷文化；随后是吠陀时期（约公元前 10 世纪—前 3 世纪）；其次是悉檀多时期（公元 5 世纪—12 世纪）。从 5 世纪中期以后印度人就已经建立起了高度发达的数学体系。可以说当时的印度数学家与希腊的丢番图在数论研究的发展上几乎是平行的。他们都利用符号来表示未知数，但是丢番图只有一个表示多个未知数的符号，而印度人却可以用梵文字母的第一个音节表示多个未知数。印度学者用一个特殊的符号表示负数，丢番图同样利用一个特殊的符号表示减法。最后，二者均对不定方程问题发生了浓厚的兴趣。

印度人用正数表示财产，负数表示欠债。用圆圈符号“0”表示零，无疑是印度人的一大发明。“0”既表示“无”的概念，又表示位值记数中的空位，它是数的一个基本单位，可以与其他数一起运算。相比之下，早期巴比伦楔形文书和宋元以前的中国筹算记数法，都是留出空位而没有符号。后来的巴比伦人和玛雅人虽然引进了零号，但仅仅是表示空位而没有把它看作是一个独立的数。

在本部分我们通过介绍几位著名的印度数学家的成就，来了解印度数学的发展。

1. **阿耶波多**(Aryabhata Ⅰ,476—约 550)

阿耶波多是迄今所知有确切生年的最早的印度数学家,出生在拘苏摩补罗,距现今的巴特拉不远。巴特拉在当时叫作华氏城,是一座有名的古城。华氏城先后是孔雀王朝、笈多王朝的都城。笈多王朝是中世纪统一印度的第一个王朝,疆域包括今天印度北部、中部和西部的大部分地区。阿耶波多出生时,笈多王朝的首都已经西迁,华氏城开始衰落,但仍为学术中心。与后来的印度数学家一样,阿耶波多的数学成果是为了研究天文学和占星术而取得的。

他只有一部天文学著作《阿耶波多历书》(499)传世。这本书包括“天文表集”、“算术”、“时间的度量”、“球”等部分,该书于公元 800 年左右被译成拉丁文,有较大的影响,并且被多次评注,特别是在南印度,许多学者对该书进行过深入的研究。

阿耶波多对数学作出了多方面的贡献,其中 π 值、正弦表和一次不定方程的解法是他最有代表性的成果。

阿耶波多在印度率先求得 $\pi=3.1416$,但其方法不得而知。在三角学方面,阿耶波多以制作正弦表闻名。古希腊的托勒密也制作过正弦表,但他把圆弧和半径的长度用不同的度量划分,非常不便。阿耶波多作了改进,他把曲线和直线用同一单位度量,制作了从 $0°$ 到 $90°$ 每隔 $3°45'$ 的正弦差值表。

阿耶波多的最大贡献是求解一次不定方程:$ax+by=c$。他建立了所谓的“库塔卡”(kuttaka,意思是粉碎或碾细)方法。例如,设 $a>b>0$,$c=(a,b)$ 是 a 和 b 的最大公因数,则

$a=bq_1+r_1, 0\leqslant r_1<b,$

$b=r_1q_2+r_2, 0\leqslant r_2<r_1,$

$\cdots\cdots$

$r_{n-2}=r_{n-1}q_{n-1}+r_n, 0\leqslant r_n<r_{n-1},$

$r_{n-1}=r_nq_n$。

依次迭代,可将 $c=(a,b)=r_n$ 表示成 a 和 b 的线性组合,即求得上述不定方程的整数解 x 和 y。

事实上,这种方法就是后来秦九韶在大衍求一术中使用的辗转相除法,它的雏形“更相减损术”早在《九章算术》里就已出现。在西方,这个方法叫欧几里得算法,只是希腊人的这套方法也不完善,丢番图也只考虑此类方程的正整数解,阿耶波多和他的后继者则取消了这个限制。

2. **波罗摩笈多**(Brahmagupta,598—665)

早期印度历史上最伟大的数学家之一是生活在公元 7 世纪早期的波罗摩笈

多，他出生在印度中央邦西南部的城市乌贾因，成年后，一直在乌贾因天文台工作。婆罗摩笈多留下了两部著名的天文学著作：《婆罗摩修正体系》(628)和《肯德卡迪亚格》(约665)。

《婆罗摩修正体系》共有24章，其中"算术讲义"和"不定方程讲义"两章是专门讨论数学的，前者研究三角形、四边形、二次方程、零和负数的算术性质、运算规则，后者研究一阶和二阶不定方程。其他各章虽然是关于天文学研究的，但也涉及不少数学知识。

婆罗摩笈多比较完整地叙述了零的运算法则："负数减去零是负数；正数减去零是正数；零减去零什么也没有；零乘负数、正数或零都是零……零除以零是空无一物，正数或负数除以零是一个以零为分母的分数。"最后这句话是印度人提出以零为除数问题的最早记录，将零作为一个数进行运算的思想被后来的印度数学家所继承。他也提出了负数的概念和记号，并给出了运算法则："一个正数和一个负数之和等于它们的绝对值之差"，"一个正数与一个负数的乘积为负数，两个正数的乘积为正数，两个负数的乘积为正数"，这些在世界上都是领先的。他继续发展了阿耶波多一些问题的解法，这些问题用今天的符号表示为求解方程：$ax+by=c$，则$x=p+mb$，$y=q-ma$，其中$x=p$，$y=q$是方程的一组特解，m是整数。

婆罗摩笈多最突出的贡献是解不定方程：$nx^2+1=y^2$，其中n是非平方数。虽然婆罗摩笈多是第一个研究此类方程的数学家，但这个方程后来却被命名为佩尔方程(Pell's equation，佩尔是17世纪的英国数学家)。婆罗摩笈多给出了这个方程的一种特殊解法，并命名为"瓦格布拉蒂"，他的方法是非常巧妙的，这项成就在数学史上占有一席之地。

婆罗摩笈多还得到边长分别为a,b,c,d的四边形的面积公式，即：

$$s=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

其中$p=\dfrac{a+b+c+d}{2}$。不过，这个公式仅对圆内接四边形是正确的。

3. 马哈维拉(Mahavira，9世纪)

7世纪以后，印度数学出现了沉寂，到9世纪才又呈现出繁荣。

马哈维拉出生于印度南部迈索尔的一个耆那教徒家庭，成年后，他在拉希特库塔王朝的宫廷里生活过很长一段时间。大约在850年，马哈维拉撰写了《计算方法纲要》一书，该书曾在南印度被广泛使用。20世纪初被重新发现，1912年，这本书被译成英文出版。这本书是印度第一本初具现代形式的教科书，现今数学教材中的一些论题和结构已在其中可以见到。另外，与以往不同的是，《计算方法纲要》是一部纯粹的数学书，几乎没有涉及任何天文学问题。全书共9章：算术术

语，算术运算，分数运算，各种计算问题，三率法(即比例)问题，混合运算，面积计算，土方工程计算，测影计算。基本是对以往数学内容的总结和推广。

马哈维拉指出，一数乘以零得零，并说减去零并不使此数减少，他还给出了除以一分数等于乘以此分数的倒数，甚至提到一数除以零为无穷量。他还着迷于一种叫花环数的游戏。将两整数相乘，若其乘积的数字呈中心对称，马哈维拉称之为“花环数”。他对这种特殊整数的构成规律进行了研究，例如：

$14\ 287\ 143\times 7=100\ 010\ 001$，

$12\ 345\ 679\times 9=111\ 111\ 111$，

$27\ 994\ 681\times 441=12\ 345\ 654\ 321$。

马哈维拉率先给出了今天我们熟知的二项式系数的计算公式，即若 $1\leqslant r\leqslant n$，$\binom{n}{r}=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)\cdots 1}$。

但他并没有给出这一算法的任何证明。他把这一法则应用到两个问题上，一个是像前人一样计算调味品的组合数，另一个是项链上珠宝的组合数，这些宝石可能是钻石、蓝宝石、翡翠、珊瑚和珍珠。他还提出与百鸡问题类似的一个问题：“鸽 5 值 3 钱，鹤 7 值 5 钱，鹅 9 值 7 钱，雀 3 值 9 钱，为讨国王欢喜，某人欲百钱买百禽，问禽、钱各几何?”为解此题，马哈维拉给出了一个很复杂的算法。此外，他改进了一次不定方程的库塔卡方法，对古老的埃及分数作了深入研究，证明 1 可表示成任意多个单分数之和，任何分数均可表示成偶数个指定分子的分数之和，等等。他还详细地研究了平面几何的作图问题，以及椭圆周长和弓形面积的近似计算公式。

4. **婆什迦罗**(Bhaskara Ⅱ，1114—约 1185)

婆什迦罗是印度古代和中世纪最伟大的数学家、天文学家，出生在印度南方德干高原西侧的比德尔。婆什迦罗的父亲是正统的婆罗门，曾写过一本很流行的占星术著作。婆什迦罗成年后，长期在乌贾因负责天文台的工作。

婆什迦罗的重要数学著作有两部：《莉拉瓦蒂》和《算法本源》，代表了印度古代数学的最高水平。关于《莉拉瓦蒂》，流传着一个传奇故事：莉拉瓦蒂是婆什迦罗女儿的名字，占星家预言她终身不能结婚。婆什迦罗也是占星家，他亲自给女儿预占结婚吉日。他把一个底部有孔的杯子放入水中，让水从孔中慢慢渗入，杯子沉没之时便是女儿吉日来临之日。女儿好奇地看着这只待沉的杯子，不料一颗珍珠从头饰上滑落到杯中，堵在杯孔上，杯子停止了继续下沉，这预示莉拉瓦蒂永不能出嫁。为了安慰她，婆什迦罗教她算术，并以她的名字命名了自己的著作。《莉拉瓦蒂》共 13 章，介绍了整数、分数的运算法则和技巧，利率方面的应用，等差

数列和等比数列的计算，平面图形和立体图形的度量计算，包括不定方程在内的代数问题及一些组合问题。《算法本源》主要探讨算术和代数问题，涉及正负数法则、线性方程组、低阶整系数方程求解等，包括一个三次方程和一个双二次方程的例子，还给出毕达哥拉斯定理的两个漂亮证明，并完整论述了零的运算法则。

婆什迦罗也比较全面地讨论了负数，他称之为“负债”或“损失”，并在数码上方加小点表示。另外，他采用缩写文字和符号来表示未知数和运算，熟练地掌握了三角函数的和差化积等公式。希腊人虽然早就发现了不可通约量，但却从不承认无理数是数。婆什迦罗和其他印度数学家则广泛使用了无理数，讨论了形如$a+\sqrt{b}$和$a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}$的无理数的平方根。和其他印度数学家一样，婆什迦罗对不定方程也有特别的兴趣，除“库塔卡”问题外，他把婆罗摩笈多关于佩尔方程的特殊解法改造成一般性的解法。

阿拉伯数学

“阿拉伯数学”并非单指阿拉伯国家的数学，而是指公元750—1450年间在伊斯兰教和伊斯兰文化占主导地位的地区，产生、发展和繁荣起来的数学理论及数学实践。从地理上看，涉及的地区包括：自伊比利亚半岛出发，穿过北非和中东，到达阿富汗、伊朗等地区，甚至还包括印度的一部分。尽管这一时期的数学著作是由包括波斯语和土耳其语在内的众多语言写成，但是绝大多数仍采用阿拉伯语进行书写。正因为如此，所以常常被称为“阿拉伯的数学”，这种说法通常又被简称为“阿拉伯数学”。这样就会给人一种暗示，即这些数学家绝大多数都是阿拉伯人，其实他们中有一些人是伊朗人、埃及人、摩洛哥人、希腊人、犹太人等。

阿拉伯数学主要有三个传统：第一个是古希腊数学，从欧几里得、阿波罗尼奥斯及阿基米德的经典几何，到丢番图《算术》中有关数论问题的不定分析，再到海伦的实用手册。阿拉伯建国后，东西两个帝国的哈里发都十分重视科学与艺术事业，他们曾经从拜占庭帝国收买大量希腊人手稿，他们还邀请各地科学家到他们的首都从事科学研究，巴格达成为当时的科学文化中心，在这一时期掀起了著名的翻译运动。8世纪末到9世纪初，《几何原本》和《天文学大成》等希腊数学、天文学经典先后被译成阿拉伯文。9世纪最著名的翻译家塔比·伊本·库拉翻译了欧几里得、阿波罗尼奥斯、阿基米德等人的著作。到10世纪，丢番图、海伦等人的著作也被译成阿拉伯文。第二个传统是印度数学。婆罗摩笈多等印度天算家的著作在766年左右已传入巴格达，并被译成阿拉伯文。印度人掌握了仅仅基于9个数码符号和用点表示空位的天才般的算术体系。印度数学对阿拉伯数学中的代数学、初等三角学，以及由天文学问题所引出的立体几何等领域均产生了影

响。第三个传统同与数学相关的从业者们有关，他们包括勘测人员、建筑人员、从事几何图案设计的艺术家、税收和遗产工作人员，此外还包括一些商人。可能是口耳相传的原因，这些人所掌握的数学知识可以穿越宗教的界限，最终成为阿拉伯世界广阔地域上的一笔财富。中世纪阿拉伯数学在内容上不仅仅反映了这三种传统，而且还取得了长足的发展，阿拉伯数学对文艺复兴以后欧洲数学的进步产生了深刻影响。

阿拉伯人的名字对于大多数读者来说并不熟悉，这里给出关于如何读、记忆阿拉伯人名字的简短说明。一个穆斯林家庭中的孩子会有一个诸如穆罕默德、哈桑、塔比等等一类的名字。接下来在名字中会出现"某某儿子"之类的短语，例如塔比·伊本·库拉（指的是库拉的儿子塔比），或者穆罕默德·伊本·哈桑（哈桑的儿子穆罕默德），其中"伊本"在阿拉伯语中是"儿子"的意思。按照这种规律，可以把几代的家谱都组合到一起，例如：易卜拉欣·伊本·西奈·伊本·库拉，从这个名字可以知道某人祖父的名字。随着年龄的增长，当一个人有孩子之后就会获得一个"父辈"的名字，例如阿布·阿卜杜拉（指的是阿卜杜拉的父亲，其中"阿布"在阿拉伯语中是"父亲"的意思）。名字中接下来的部分是一个人所在的地区或者籍贯所在地，例如：阿尔·花拉子米，指的是这个人来自花拉子米地区。在名字的最后可能会有一个"标签"，它可能是一个族名，例如"做帐篷的人"(al-Khayyāmī)，也可能是一个别号，例如"正义"(al-Rashīd)。把所有这些组合在一起，就是一个阿拉伯人的全名。

1. 代数学

现存最早的代数学著作是花拉子米（Muhammad ibn Mūsā al-Khwārizmī，约 783 -约 850，图 1-40）所著的《还原与对消计算概要》（又名《代数学》，约 830 年成书）。此书是为了献给当时的统治者哈里发马蒙而编著的，马蒙在位时间为公元 813—833 年，且于统治期间在巴格达建立了一所名为"智慧宫"的研究机构。花拉子米是对欧洲数学影响最大的中世纪阿拉伯数学家，生于波斯北部花拉子米城，今乌兹别克斯坦境内，曾就学于中亚古城默夫（Merv），813 年后来到巴格达，成为智慧宫的领头学者。



图 1-40　花拉子米

《代数学》首先指出，该书的数学问题都是由根（x）、平方（x^2）和数（常数）这三者组成；然后分 6 章叙述 6 种类型的一、二次方程求解问题：$ax^2=bx$，$ax^2=b$，$ax=b$，$x^2+px=q$，$x^2+q=px$，$x^2=px+q$，并都给出了相应的求根公式。这六种

方程的系数都是正数，可统一为一般形式：$x^2+px+q=0$。

这样，花拉子米相当于获得了一般的求根公式：

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{(\frac{p}{2})^2-q}$$

每一问题求出正根 x 后，花拉子米又求出根的平方 x^2。他明确指出，二次方程可能有两个正根，也可能有负根，但他不取负根与零根。在以上 6 章内容之后，花拉子米又以几何方式证明了上述各种解法的合理性。

花拉子米指出，任何二次方程都可以通过“还原”与“对消”的步骤化成他所讨论的 6 种类型方程。由此可见，《代数学》关于方程的讨论已超越传统的算术方式，具有明显的代数特征。它第一次给出了一元二次方程的一般代数解法及几何证明，同时又引进了移项、同类项合并等代数运算，这一切为“解方程的科学”——代数学开拓了道路。大约在 1140 年，《代数学》被译成拉丁文，作为标准的数学课本在欧洲使用了数百年，引导了 16 世纪意大利代数方程求解方面的突破。

花拉子米的另一本书《印度计算法》也是数学史上十分有价值的数学著作，其中系统介绍了印度数码和十进制记数法，以及相应的计算方法。尽管在 8 世纪印度数码和记数法就随印度天文表传入阿拉伯，但并未引起人们的广泛注意，正是花拉子米的这本书使它们在阿拉伯世界流行起来。它后来被译成拉丁文在欧洲传播，所以欧洲一直称这种数码为阿拉伯数码。该书书名全称为《花拉子米的印度计算法》，其中 Algoritmi 是花拉子米的拉丁译名，现代术语“算法”(Algorithm)即源于此。

波斯人奥马·海亚姆(Omar Khayyam，约 1048—1131，图 1-41)是 11 世纪最著名且最富有成就的数学家、天文学家和诗人，生于霍拉桑的内沙布尔，今伊朗境内。他出生时该地区刚刚被塞尔柱突厥人占领，因此他的一生中绝大多数时间都得到了塞尔柱统治者的支持。他在伊斯法罕天文台负责历法改革，制定了精密的哲拉里历。


图 1-41　奥马·海亚姆

他在代数学方面的成就集中反映在他的《还原与对消问题的论证》(简称《代数学》，约 1070)一书中，其中有开平方、开立方算法，最主要的是他在书中将三次方程进行了分类，并且在方程有解的前提下，利用适当的圆锥曲线相交来对方程的解进行定性描述。

阿基米德在解用平面截球，使所截得的两部分体积比为定值的问题时，导致一个三次方程：$x^2(a-x)=bc^2$。他利用两条圆锥曲线 $y(a-x)=ab$，$ax^2=c^2y$ 的交点来求解。受阿基米德的启发，奥马·海亚姆也采用这种方式解三次代数方

程。他首先将不高于三次的代数方程分为 25 类(系数为正数),找到其中 14 类三次方程,对每类三次方程给出一种几何解法。例如解 $x^3+ax=b$,首先将其化为 $x^3+c^2x=c^2d$(这里 $c^2=a$,$c^2d=b$,按照希腊人的数学传统,a,b 是线段,c^2 是正方形,c^2d 是长方体),方程 $x^3+c^2x=c^2d$ 的解就是抛物线 $x^2=cy$ 与半圆 $y^2=x(d-c)$ 的交点横坐标 x。这一创举,使代数与几何的联系更加密切。可惜在 1851 年以前,欧洲人并不了解奥马·海亚姆的这种解析几何方法。

在使用数学符号方面,阿拉伯人始终使用语言叙述他们的解法,没有继承丢番图和印度人的做法,在这一点上阿拉伯人退步了。

2. 三角学

由于天文学计算的需要,阿拉伯天文学家都致力于高精度三角函数表的编制。9 世纪的海拜什·哈西卜(Habash al-Hasīb,约卒于 864—874)在印度人工作的基础上制定了间隔为 15′的 60 进制正弦表,并且还编制了间隔为 1°的正切表。在此基础上,阿布·瓦法(Abū Wafa,940—997?)又进一步编制出间隔为 10′的正弦表和余弦表,特别是比鲁尼(Al-Bīrūnī,973—1050)利用二次插值法制定了正弦、正切函数表。

阿布·瓦法曾在巴格达天文台工作,其重要的天文学著作《天文学大全》除了一些精细的三角函数表外,还证明了与两角和、差、倍角和半角的正弦公式等价的关于弦的一些定理,证明了平面和球面三角形的正弦定理。比鲁尼曾经得到马蒙哈里发的支持,在乌尔根奇建造天文台并从事天文观测,是一位有 146 部著作的多产学者,其《马苏德规律》一书,在三角学方面有一些创造性的工作。比鲁尼给出了一种测量地球半径的方法,还证明了正弦公式、和差化积公式、倍角公式和半角公式。

9 世纪天文学家阿尔·巴塔尼(Al-Battānī,858? —929)对希腊三角学加以系统化。其《天文论著》(又名《星的科学》)被译成拉丁文后,在欧洲广为流传,哥白尼、第谷、开普勒、伽利略等人都利用和参考了其中的成果。在这本书中,阿尔·巴塔尼创立了系统的三角学术语,如正弦、余弦、正切、余切。


图 1-42 纳西尔·丁·图西

在 10 世纪末,由于 6 种三角函数的引入,精确到相当于小数点后第八位的三角函数表的计算,平面三角形、球面三角形正弦定理以及球面三角形切线定理的发现,都使得三角学迅速发展。这一工作的集大成者是纳西尔·丁·图西(Nasir al-Dīn al-Tūsi,1201—1274,图 1-42)。纳西尔·丁·图西来自今伊朗的图斯,生活于十字军和

蒙古人的侵占时代，是一位知识渊博的学者。他在波斯的尼撒普尔受过完整的正式教育，这个地方是当时的主要学术中心。由于蒙古伊尔汗帝国的君主旭烈兀十分重视科学文化，纳西尔·丁·图西受到他的礼遇。纳西尔·丁·图西建议在马拉盖建造大型天文台，得到旭烈兀的允许和支持，其后一直在这里从事天文观测与研究。

在其著作《论完全四边形》(13世纪)中，纳西尔·丁·图西对于上面提到的内容及其他一些定理给出证明，同时系统地讨论了平面、球面三角形求解问题。所谓完全四边形，是指平面上的两两相交的四条直线或球面上的四条大圆弧所构成的图形。该书系统阐述了平面三角学，明确给出正弦定理；讨论球面完全四边形，对球面三角形进行分类，指出球面直角三角形的6种边角关系。

纳西尔·丁·图西在书中还讨论了解平面和球面斜三角形的一些方法，引入极三角形的概念以解斜三角形。他指出在球面三角形中，由三边可以求三角，反之，由三角也可以求三边，这是球面三角形与平面三角形相区别的一个重要标志。在这本著作问世之前，三角学曾经一直被认为是天文学的附庸，但是人们逐渐发现这些知识可以应用到其他许多领域，例如可以应用到计时和大地测量学中。纳西尔·丁·图西著作的出现第一次赋予了三角学独立于天文学应用的地位。《论完全四边形》对15世纪欧洲三角学的发展起着非常重要的作用。

阿拉伯人的三角术是算术性的，这一点与印度人一样。例如由正弦值求余弦值时，他们利用恒等式 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 作代数运算而求解，而不是利用几何关系来推算，这是一种进步。

3. **几何学**

到9世纪末，欧几里得的《几何原本》和阿基米德的《圆的度量》已经在阿拉伯世界里广泛流传。除此之外，在当时的阿拉伯世界还可以找到难度更深的数学著作，例如阿基米德的《论球和圆柱》、阿波罗尼奥斯的《圆锥曲线论》和天文学家托勒密的《天文学大成》。穆斯林学者们在掌握了这些著作内容的基础上，又取得了新的成就，如关于旋转抛物体体积的理论、利用双曲线构造正方形内接正五边形、球面在平面上的投影理论等。

由于圆锥曲线的理论问题以及实际天文观测中日晷或特殊形式星盘的设计问题，阿拉伯学者们很自然地将其注意力集中到一种名为“完美圆规”仪器的设计上，这种仪器可以使人们像旋转普通圆规那样作圆锥曲线。除了这些相对较难的知识外，《几何原本》中的许多问题也向阿拉伯数学家们提出了挑战，其中一些是对《几何原本》中原有方法的拓展，例如利用张角固定的圆规作正五边形。另一个挑战是有关演绎体系中平行公设的地位问题。这个问题首先由希腊学者提出，他

们认为欧几里得所给平行公设并不是一个真正的公设，而只是一个定理而已。试图对平行公设的证明一直持续到中世纪，就连奥马・海亚姆和纳西尔・丁・图西这样著名的数学家也参与其中。

奥马・海亚姆在《辨明欧几里得公设中的难点》(1077)中，试图证明平行共设。奥马・海亚姆的证明被纳西尔・丁・图西所继承，纳西尔・丁・图西在他的两种《几何原本》译注中都讨论了平行公设，其《令人满意的论著》一书是关于平行公设研究的专著。

阿拉伯人关于第五公设证明的尝试，诱发了后世欧洲学者在这方面的兴趣，对非欧几何的诞生有一定的影响。

五、欧洲中世纪数学



欧洲中世纪是指公元5世纪至15世纪，历史学界一般认为，公元467年西罗马帝国灭亡是中世纪的开端，到1453年东罗马帝国灭亡结束[①]。欧洲中世纪是前承“欧洲古代”后启“欧洲近现代”的过渡时期，这个时期早期天主教会成为欧洲社会的绝对统治势力，教会宣扬天启真理，并拥有解释这种真理的绝对权威，导致理性压抑，再加上战争频繁，造成科技和生产力发展停滞，这一时期的学术与文化发展处于停滞状态，从中世纪初到公元8世纪左右的时期被称为“黑暗时期”。到中期10世纪左右天主教会逐渐让位于基督教会，整个社会以宗教和神学为核心，对科学和数学的兴趣不大。中世纪后期12世纪学术与文化开始逐渐复苏，为欧洲文艺复兴做了准备。中世纪欧洲数学延续了希腊传统数学、罗马数学，也受阿拉伯文化影响，出现了几位数学家：博伊西斯、比德、阿尔昆、热尔贝、阿德拉德、斐波那契、布雷德沃丁、奥雷姆等。本部分将从中世纪的历史背景、数学家及其成就等方面，概述“中世纪”这一由古代学术衰落到文艺复兴时期学术兴起的一千年里，欧洲由希腊和罗马的高峰降落下来，再沿着近现代的斜坡挣扎上去所经过的一个低谷时期的数学发展状况。

历史背景

先简述一下欧洲中世纪之前文明的大致发展脉络。文明之源始自底格里斯—幼发拉底河以及尼罗河流域的广阔区域，上古时代中，在科学史上比较重要的是亚述人、古巴比伦人、古埃及人和腓尼基人。其中对数学进展产生显著影响的是古巴比伦人和古埃及人，他们发展起来的技术和经验性法则被古希腊人传承下来，成为今天科学的源头。古希腊人在数学方面比其他学科方面有更惊人的进步，他们奠定了数学学科的基础，且在数学的各个部分都作出了不朽贡献。古希

---

①对于欧洲中世纪结束的时间，学界持有不同观点：有观点认为1453年东罗马帝国灭亡是中世纪结束的标志，也有观点认为1640年英国资产阶级革命是中世纪的下限。一般教科书多采用第一种说法。

腊数学史上有三个辉煌的时期:毕达哥拉斯学派时期,柏拉图和柏拉图学园时期,亚历山大学派时期。整个这个时期产生过的有影响的人物有:毕达哥拉斯、柏拉图、欧多克索斯、亚里士多德、泰勒斯、欧几里得、阿基米德、阿波罗尼奥斯、托勒密等。至托勒密逝世后,希腊科学的黄金时代就结束了,进入一个停滞时期,至公元3世纪末对数学有所贡献的只是帕普斯和丢番图。自公元后,亚历山大学派的精神开始衰退,到公元5世纪衰落到了最低谷,世界文明中心转移至罗马,罗马逐渐强大,其领土范围从印度河到直布罗陀海峡,从尼罗河到不列颠海岸。虽然罗马在艺术、文学和法律方面留下了宝贵的遗产,但在数学和科学方面的成就却很平凡。因此,这一时期进入所谓中世纪的"黑暗时期"。强盛的罗马帝国在公元5世纪很快瓦解,之后西方文明在多方面有所变化。西方被分为两个不同的文化地域:阿拉伯—伊朗世界和欧洲。而欧洲又被分为西部的日耳曼—拉丁和东部的希腊—斯拉夫,东西部欧洲的差别并不显著。欧洲的政治和文化中心向北转移:从地中海盆地(希腊和罗马)迁到北海和波罗的海附近——法兰西、英格兰、荷兰、日耳曼、斯堪的纳维亚、波兰和俄罗斯。罗马政权倾覆后,基督教教会的地位日益重要,人们对纯粹科学和数学不再感兴趣,科学与文化的发展缓慢,随后的三个世纪左右,欧洲处于文明的黑暗时期。图1-43为古代学术传播到西欧的路线。

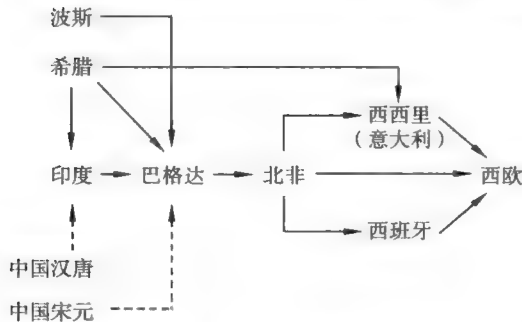


图1-43 古代学术传播到西欧的路线

到公元7世纪,在远离罗马的英格兰学术复兴迹象开始萌芽。比德(V. Beda,约674—735)将一切能搜集到的古代学术搜集起来编撰成书,古代学术得以流传到中古时期。公元800年,罗马统治者查理曼有着恢复过去荣光的热望,于是他坚持要求牧师们要有高深的学问,设立与教会、僧侣机构保持联系的学校,将大批学者从意大利、英格兰与西班牙召集而来,开设七艺,即文法、修辞、逻辑、算术、几何、天文、音乐,后四种是与数学有关的科目,强调数学定理是上帝创造的,学习数学可以接近上帝的思想,得到上帝的启示等。公元9世纪以查理曼的宫廷为起点和中心的学术复兴通常被称为查理曼王朝复兴时期。然而,公元814年查理曼逝世后,短暂的复兴时期结束了。

公元11世纪初再次发生转折,西尔维斯特教皇二世,即热尔拜尔(Gerbert,约950—1003),对促进学术和教授"七艺"抱有热枕,对数学研究产生兴趣。他编写了几何学以及珠算的论著。但以后的两百年来,数学进展仍然缓慢。

虽然，古希腊文明衰落及学术中心发生转移，但是古希腊著作并未在欧洲失传。甚至在最黑暗的时期，拜占庭帝国的皇宫中也保存了很多古希腊学术著作。公元7世纪初，阿拉伯人在穆罕默德带领下，逐渐征服大马士革和耶路撒冷，并于公元641年攻入亚历山大，掠走古希腊的杰作。到7世纪中叶，巴格达便成了东方文化的中心。穆罕默德一直拓展领土到西班牙，将古希腊文化传统继承下来并发扬光大后传播到西欧。与东方相对应，科尔多瓦成为西方文化中心。

穆罕默德之后进入哈里发的统治，标志着欧洲新时代的开始，也进入阿拉伯文化的伟大时期。公元8世纪下半叶，阿拉伯人开始大量翻译古希腊著作，古希腊文化传统以这样的方式得以保存下来。而且，由于同东方的商业往来日益增多，印度文化也传播到了巴格达，印度的天文表被翻译出来，阿拉伯人借此熟悉印度计数系统。在这一时期也产生了他们自己的著名数学家——花拉子米(图1-40)。

花拉子米编写过关于算术和代数的著作。他的算术著作仿效印度婆罗摩笈多的著作，引入了印度数字；代数著作中的创造是解二次方程时给出了两个根，这个结果比丢番图的一个根前进了一步。在三角学方面，则继承了托勒密的三角学；在编制数表方面，已自由使用正弦函数和正切函数。花拉子米之后，阿拉伯人翻译了欧几里得、阿基米德、阿波罗尼奥斯和托勒密的著作。随后一个世纪里，阿拉伯的科学达到顶峰。到10世纪末，西方基督教开始征服西班牙，阿拉伯的数学迅速衰落。到12世纪，阿拉伯文化被西欧利用，西方学者中兴起了翻译的热潮，可以说12世纪是欧洲数学的翻译时代。英国人阿德拉德(Adelard，约1120)把从阿拉伯人那里获得的《几何原本》的手抄本译成拉丁文，把花拉子米的《代数学》译成拉丁文并将其天文表带回西方；最伟大的翻译家杰拉德(Gerard，约1114—1187)将90多部阿拉伯文著作翻译成拉丁文，其中包括托勒密的《天文学大成》、欧几里得的《几何原本》、阿波罗尼奥斯的《圆锥曲线论》及阿基米德的《圆的度量》。

12世纪开始了学术史上的辉煌时期，这个时期兴起了高等学校，标志着黑暗时期的结束。作为唯一学习场所的修道院学校和教会学校，已经不能适应日益提高的教育要求，所以诞生了高等学校，在整个中世纪对知识的传播起了极其重要的作用。在高等学校中可以学习到文法、修辞、辩证法以及更高级的算术、几何学、天文学和音乐。欧洲最早的非教会高等学校是1158年意大利建立起来的波伦亚大学，巴黎大学也是在12世纪形成的非教会学校。13世纪，英国出现了剑桥大学和牛津大学，西班牙出现了萨拉曼加大学，葡萄牙成立了科英布拉大学等。14世纪时，各国大学如雨后春笋般出现。

13世纪初西方已经有了大部分希腊学术名著的拉丁文译本，引出了欧洲活

跃的科学复兴时期，开始了数学史上的重要时期。这次复兴的背景既有十字军将欧洲与东方建立起联系，又有高等学校发挥出提高知识追求的作用，还有人们寻求新大陆的探索提出了提高航海技术的要求，这对天文学和数学两门学科产生了强烈影响。所有这些因素综合在一起，形成科学史上蔚为大观的一个时期。意大利的斐波那契(L. Fibonacci，约 1170—1250)是这一时期最著名的数学家。他在 1202 年编纂的《算经》(也译作《算盘书》)一书以严谨证明著称，在两个世纪中一直被视为标准著作，把印度计数制度介绍到欧洲。

14 世纪相对来说是欧洲数学的荒芜时期。这个世纪黑死病流行欧洲，扫荡了三分之一以上的人口，北欧在政治、经济上发生动荡。这一时期最著名的数学家是奥雷姆(N. Oresme，约 1323—1382)。

15 世纪开始了欧洲的文艺复兴。随着 1453 年君士坦丁堡落入土耳其之手，拜占庭帝国瓦解，难民们带着古希腊的文化财富流入意大利。许多古希腊经典著作不再需要通过阿拉伯译本传播，而可以直接根据古希腊原版进行研究和学习了。15 世纪中叶，由于改进了印刷术，知识的传播速度史无前例，科学又重新进入高涨的发展时期，科学相对停滞的中世纪结束了。

下面简要介绍欧洲中世纪时期的数学家及其工作，从中可见这一时期数学发展的状况。

数学家及其成就

1. 博伊西斯(Boethius，约 480—524)

生于罗马，早年受古希腊式传统教育，约公元 510 年任东哥特王国执政官，约公元 520 年任首席执政官，几年后遭政事牵连被害。他学识渊博，著述颇丰，曾根据希腊材料用拉丁文编写了《算术入门》(De Institutione Arithmatica)和《几何学》(Geometira)教科书。前者内容有：算术的基本概念和术语、乘法表、比例、素数与合数等知识，基本取材于希腊数学家尼克马霍斯的同类著作，但删掉许多在当时较新颖的命题，主要目的是为学习算术知识提供一个初级手册，成为欧洲教会学校的标准课本。后者主要取材于欧几里得《几何原本》的第一卷和第三、四卷的部分命题，还包括简单的测量术，同样删掉了很多必要的证明，成为一本非常浅显易懂的几何课本。博伊西斯以他的数学及哲学著作成为中世纪经院哲学的奠基人，但他在政治上受到迫害，死后被教会认为是殉道者，因此这两本书在中世纪被指定为教会学校的标准课本，流传近千年。这种情形反映出中世纪数学相对于古希腊繁荣时期的萧条。古希腊文化通过罗马人传到中世纪的很少，其中大部分体现在博伊西斯的著作中。博伊西斯较早地使用了大量拉丁文数学词汇，并提出

划分数学学科的“四道”说，影响深远。

2. **比德**

英国学者，中世纪最重要的教会学者之一。在《论指示语》(De Loquela per Gestum Digitorum)中完整地记述了手指计数的方法及其在各种计算中的应用，这些应用之一是准确地确定复活节的时间。他以多方面的才能被誉为“英国文化之父”。

3. **阿尔昆**(Alcuin，约 736—804)

英国学者，以僧侣为职。曾力劝查理曼皇帝在宫中设置学校，他在学校中教授算术，编写了许多引人入胜的教科书。由于他的影响，当时法国和德国仿效英国创办了一系列初级学校，有些成为后来大学的前身。

4. **热尔拜尔**

法国学者，是第一个在西班牙穆斯林学校学习的基督教徒，将印度—阿拉伯码带入欧洲。曾在皇室任教师，后当隐修院院长、地方大主教，直至公元 999 年被选为罗马教皇西尔维斯特二世。他大力提倡数学学习，在任教皇期间，算术、几何等学科受到普遍重视。他还自编教材，自制教具如算盘、地球仪和天球仪、钟及风琴，大力扩建教会学校，还写了关于占星学、算术和几何学的著作。

5. **阿德拉德**

英国学者，最早将欧几里得《几何原本》的阿拉伯文本译为拉丁文。由于他的译本翻译质量高、发行早，受到普遍欢迎，在西欧一直使用到 16 世纪。他还翻译了花拉子米等人的著作，并自己写过数学书。

6. **斐波那契**(L. Fibonacci，约 1170—1250，图 1-44)

意大利数学家，也是欧洲黑暗时期过后第一位有影响的数学家。他早年随父经商，在北非布日伊受教育，师从阿拉伯人学习算学，后游历地中海沿岸诸国，1200 年回意大利后潜心写成《算经》(Liber Abaci)等。这部有名的著作主要是源自古代中国、印度和希腊的数学问题的汇编，内容涉及整数和分数算法、开方法、二次和三次方程以及不定方程；书中系统介绍了印度—阿拉伯数码，对改变欧洲数学的面貌产生了很大影响；解释了位值制原理，将其用于四则运算，论述了各种应用问题，对三角学也有贡献。



图 1-44 斐波那契

1228 年修订再版了《算经》，增加了脍炙人口的“兔子问题”：

某人养了一对兔子，假定每对兔子每月生一对小兔，而小兔出生后两个月就能生育。问从这对兔子开始，一年内能繁殖多少对兔子？

对这个问题的回答，导致了著名的斐波那契数列：

1，1，2，3，5，8，13，21，…

这个数列产生的规则是，开头两个数 1 以后的每个数都是由它前面两个数相加而得。《算经》被视作欧洲数学在经历了漫长的黑夜之后走向复苏的号角。

斐波那契于 1220 年著《实用几何》(Practia Gemetriae)，这一巨著以欧几里得式的严谨处理几何学和三角学问题。约 1225 年他写了《象限仪书》(Liber Quadratorum)，这部关于不定分析的著作，使他成为这一领域与丢番图和费马同样杰出的数学家。

7. **布雷德沃丁**(T. Bradwardine，约 1290—1349)

英国学者，坎特伯雷大主教，牛津大学神学教授。最早将正切、余切引入三角运算，被誉为 14 世纪英国最杰出的数学家，是欧洲最早研究三角学的数学家之一。

8. **奥雷姆**

法国数学家，曾任神学院院长和地区主教，有数学论著若干。他最早引入分指数概念，规定了它的记法和使用规则。为研究变化与变化率，萌发了坐标几何思想，尝试用两个坐标确定点的位置，并用图象表示变化中的量，成为 17 世纪笛卡尔创立解析几何的先声。还证明了调和级数的和为无穷，区别了收敛级数与发散级数，给出级数敛散的某些判别法则，发展了古希腊学者的极限思想。

欧洲数学复苏的过程十分曲折，从 12 世纪到 15 世纪中叶，教会中的经院哲学派利用重新传入的古希腊著作中的消极成分来阻碍科学的进步。特别是他们把亚里士多德、托勒密的一些学说奉为绝对正确的教条，企图用这种新的权威来继续束缚人们的思想。欧洲数学真正的复苏，要到 15、16 世纪文艺复兴的高潮时，数学的发展与科学的革新紧密结合在一起，数学在认识自然和探索真理方面的意义被文艺复兴者们高度强调，科学的数学化趋势的增长促使数学本身走向繁荣。虽然中世纪的数学发展缓慢，但为后来的复兴作了准备。



中篇

近代数学



一、数学符号化与代数学的发展——从数字到结构



数学符号

符号是人们约定用来指称一定对象的标志物。人们总是探索用简单的记号去表现复杂的事物，于是产生了各种符号，它们所具有的最显著的特征就是简单易辨认。

数学符号（图 2-1）是数学科学专门使用的特殊符号，是一种含义高度概括、形体高度浓缩的抽象的科学语言，可以使数学思维过程更加准确、概括、简明、直观，易于解释数学对象的本质。不掌握数学符号就无法接受数学知识、进行数学研究，更无从表达数学思维。

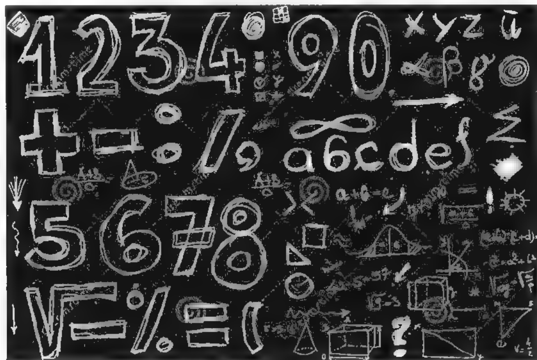


图 2-1　数学符号

数学的符号化是数学发展的必然，它的意义在于：

(1)数学符号简洁、清晰，有利于书写、辨认、运算及论证；

(2)数学符号表意准确，能避免文字叙述所产生的歧义；

(3)数学符号抽象程度高，有利于概括数学对象、揭示一般规律。

数学符号的创造是在数学的发展过程中不断进行的，每提出一个新概念、新

理论、新方法，必定会增加一些新的术语和新的符号。数学符号的使用是推动数学发展的内在动力因素之一，数学的历史在一定程度上就是数学符号的发展史。

欧拉公式——最优美的数学公式之一

$$e^{\pi i}+1=0$$

$$e=2.718\ 281\ 828\ 45\cdots$$

$$\pi=3.141\ 592\ 653\ 58\cdots$$

$$i=\sqrt{-1}$$

这个公式的巧妙之处在于，将数学中最重要的超越数 π，e 和虚数 i，以及数学中（也是哲学中）最重要的 0 和 1，以简单的加号相连放在了同一个等式中。透过这个公式能够体会到数学符号的简洁美、统一美、含蓄美。

数学家们给了这个公式许多赞誉，如“上帝创造的公式”、“最卓越的数学公式”、“欧拉的宝石”等。数学王子高斯更是语出惊人：“如果被告知这个公式的学生不能立即领略它的风采，这个学生将永远不会成为一流的数学家。”

数学的符号化历程

1. 数学对象的符号化

数学符号中最基本的是数字符号，整个数学就是从简单的记数开始发展起来的。人类文明的产生时间确定在大约距今五千多年前，因为人类在那个时候创造了文字（图 2-2）。古埃及、古巴比伦、中国、古希腊、古印度、玛雅文明中先后出现了各具特色的记数符号。



古埃及象形文字
（公元前 3400 年左右）



古巴比伦楔形文字
（公元前 2400 年左右）



中国甲骨文字
（公元前 1800 年左右）

图 2-2　古文字

15 世纪之前，数学符号的发展主要表现在六个古代文明的数字系统的发展，各文明在符号来源、形式、运算规则等方面有很大差异。但除了古巴比伦楔形数字采用六十进制、玛雅数字采用二十进制之外，其他均属于十进制记数系统。数字符号以及记数系统的创立也带动了一系列数学运算的发展，诸如加、减、乘、除、开方都是相当古老的运算，这就为后来创造数学运算符号打下了坚实的基础。

印度—阿拉伯数字系统的完善成为下一步数学符号发展的关键。现在人们普遍使用的印度—阿拉伯数字首先由印度人创造，如图 2-3 所示。大约在公元 6 世纪末期，印度数码系统完成了向十进位值制的过渡。用 9 个单独的符号表示 1～9，用单独的符号来表示“零”，用这十个符号实现了位值制记数法。

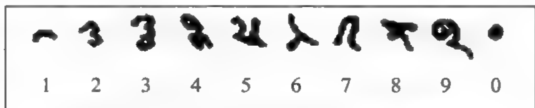


图 2-3 “巴克沙利手稿”中出现的数码（公元 3 世纪之前成书）

公元 7 世纪初，阿拉伯人建立了横跨亚、欧、非三大洲的帝国。他们定都巴格达，修建智慧宫广聚贤才，大兴翻译运动，对古希腊、古印度等的文化典籍进行了大量的翻译和研究。最初他们沿用古希腊的记数法，用 9 个字母表示 1～9，9 个字母表示 10～90，9 个字母表示 100～900。这样就可以用几个字母的组合表示 1 000 以内的所有自然数。公元 12 世纪之前，阿拉伯数学著作大都采用这种记数法。

阿拉伯人在印度数码的发展史上扮演了重要的角色。在对印度著作的翻译和研究工作中，影响最大的是花拉子米（约 783—约 850），他是第一位系统介绍印度数码的阿拉伯人。其著作《印度的计算术》一书，对印度人用的 9 个数码和零号的位值制记数法及其重要性做了详细论述。这是第一部用阿拉伯文撰写的在伊斯兰国家介绍印度数码和记数法的著作，对印度数码及记数法在阿拉伯帝国的传播和普及起到了决定性作用。

12 世纪中叶，欧洲人大量翻译和研究阿拉伯著作。拉丁文译著《花拉子米的印度计算术》在欧洲传播，对欧洲的数学发展产生了显著的影响。

印度—阿拉伯记数法逐渐代替希腊字母记数法和罗马记数法，15 世纪在欧洲普遍推广。到了 16 世纪，现在普遍使用的位值制及十进小数记数法也得到了广泛应用，这大大推动了计算技术的发展。

印度—阿拉伯记数法之所以能战胜所有的其他类型的记数法流传下来，在于其具备以下要素：用完全抽象的独立符号表示 1～9 的数量；运用了零的概念及符号；采用彻底的十进位值制记数法。高斯曾感慨道：“假如阿基米德能做出这个发现，现在的科学该处在多高的水平啊！”

历史上的各种数码符号如图 2-4 所示。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	20	50	60	100	500	10^3	10^4	10^5	81
古巴比伦楔形数码																					
古埃及象形符号																					
古埃及僧侣符号																					
古埃及民间符号																					
中国甲骨文	一	二	三	亖																	(3万)
中国算筹																					
古希腊象形数码																					
古希腊阿提卡数码																					
古希腊字母计数																					
早期罗马符号																					
罗马数字	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XX	L	LX	C	D	M			LXXXI
古印度哈拉马数码																					
古印度卡罗什奇数码																					
古印度婆罗门数码	一	二	三																		
古印度德温那格利数										(零)											
阿兹台克数码																					(八千)
玛雅数字																					
西阿拉伯数码																					
东阿拉伯数码										(零)											
15世纪										(零)											81
16世纪	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0 (零)											81

图 2-4　历史上的数码符号（引自：徐品方，张红著，《数学符号史》，科学出版社，2006.）

印度数码早在 7 世纪就传入中国，成型的阿拉伯数字也在 13—14 世纪传入中国，为什么直到 20 世纪初才开始使用呢？其主要原因就是汉字的“一、二、三、四……”相对于阿拉伯数字，笔画简单易写，而且也是十进位值制，一时看不出阿拉伯数字的显著优越性。19 世纪后半叶，中国虽大量引入和翻译西方近代数学著作，但译者们采用了全部翻译成中文的办法。乘除符号用相应的汉字表示，英文字母采用天干地支外加“天、地、人、物”来对应，例如：

二天丄三地丅人＝四五（$2x+3y-z=45$）

彳天地＝天彳地丄地彳天（$dxy=xdy+ydx$）

这种表示方法不如原文简单易写，不具有启发性，即便是中国人也难以接受，

清朝灭亡后这些符号便废弃了，转而采用世界上通用的先进的数学符号。古埃及、古巴比伦等古文明的文字作为数学符号没有流传至今，也是其文字符号的特点决定了它们的命运。

2. 数学运算的符号化

15 世纪以前的数学，由于涉及的概念较少，关系比较简单，所以除数字符号以外，很少采用运算符号。表达数学问题采用的是文字叙述方式，即通过对上下文的理解来弄明白其中的数学关系。例如，古巴比伦的泥板书上刻有“求一个数，使它与它的倒数之和等于已给数”这样的一元二次方程问题；古埃及的纸草书中有“一个数量，它的 2/3，它的 1/2，它的 1/7，它的全部，加起来总共是 33，求这个数”这样的记载。各个文明都出现过这类“文词代数”问题，缘于早期的数学问题直接来源于实际生活需要，用语言叙述起来比较自然。

15 世纪以来，随着科技进步，数学也有了突飞猛进的发展。数学概念不断增多，数学关系日益复杂，用自然语言表述冗长，易产生歧义，“文词代数”越来越不利于表述数学问题。语言叙述已经不能精确地表达数学概念与关系，因此人们开始经常地使用符号来表示一些运算，诞生了一大批自创符号。现代沿用下来的“＋”、“－”符号早在 15 世纪中期就已经有了，16 世纪已被普遍使用。“×”、“÷”、“$\sqrt{\ }$”符号在 17 世纪也已开始使用。17 世纪中叶，算术中常用的运算符号基本上确定了下来。

3. 数学关系的符号化

等于、大于和小于的符号是 16 世纪中期开始引进的。1557 年牛津大学教授雷科德（Recorde，1510—1558）在论文中首先使用“＝”符号表示相等关系。为了避免枯燥地重复“等于”这个词，他主张“放两条平行线段——同样长的一对双生子，任何两样东西不可能比他们更相等”。后来韦达（F. Vieta，1540—1603）、笛卡尔等还创造了许多其他样式的符号表示相等关系，但最终“＝”被人们接纳下来。“＞”、“＜”符号于 1631 年在英国数学家哈里奥特（Harriot，1560—1621）的遗作《分析术实例》中出现，到 18 世纪初已被人们广泛地使用了。

4. 用字母表示未知量，“算术”升华为“代数”

在数学运算的符号化过程中，偶有用字母代替特定的数的情况，但这种现象并不常见。引入未知量、用字母表示未知量的值参与运算，这是韦达的最大功绩。

韦达不满足于对每一问题都有特殊解的传统，试图抽象出一般的方法。他系统地引入代数符号，区别了已知量、未知量和未知量系数。相对于以前谋求具体问题的具体解来说，引入未知量之后就可以研究已知量、未知量、系数之间的关

系。数学家们的任务变为研究一般方程的性质。韦达创立的符号代数是数学的重要进步，标志着“算术”与“代数”的分离，数学也进入到一段辉煌的发展时期。

5. **更一般数学对象的符号化**

符号代数使数学家们尝到了甜头。他们意识到，用一套有数学含义的符号来表述数学对象的结构和规律，可以使得数学研究上升为更高的抽象层次，容易洞悉问题的本质并找到更好的解决方案。此后直到 19 世纪，更一般的数学对象开始逐步实现符号化，例如集合、曲线、方程、函数、语句的符号化，等等。数学符号的规范化、形式化发展成为推动数学进步的巨大力量。

代数学

代数学这一学科的研究对象一直处于变动中，经历过多次深刻变化甚至发生根本变革，以至于后来的研究内容和方法对于前面的代数来说，总要冠以“近代”以示区别。在历史上，它至少有三次“近代化”，第一次是符号代数或字母代数的产生；第二次是 19 世纪中叶不变式论的创立；第三次是 20 世纪 30 年代抽象代数学的诞生，这一次变革最终使得代数学成为一门研究代数结构的数学分支。数学的多样性在代数的发展过程中得到了充分的体现。

“代数”这个名词来源于花拉子米的数学著作《还原与对消计算概要》(al-Kitāb al-mukhtasar fihisāb al-jabr wa'l-muqābala)，阿拉伯语“al-jabr”意为“还原”(移项)。该书在 12 世纪传入欧洲后出现多个拉丁文译本，译名各不相同，后来简译为“Algebra”，逐渐成为这门学科的名称。书中讨论了线性方程组，并第一次给出了一元二次方程组的一般代数解法。所谓代数解法，就是通过代数运算(加法、减法、乘法、除法、乘方、开方)求解的方法。

该书作为数学课本在欧洲使用数百年，影响深远，代数学也成为了解方程的学问。所以在漫长的中世纪过后，欧洲人在数学上的推进是从代数学开始的，首先是意大利数学家解决了三、四次方程的求解问题。

大约 1515 年，意大利数学家费罗(S. del Ferro，1465—1526)用代数方法求解了形如 $x^3+mx=n(m,n>0)$ 类型的三次方程，并将解法传授给他的学生费奥(Fior，生卒年不详)。1535 年，另一位意大利数学家塔塔利亚(Tartaglia，意为“口吃的人”，原名 Niccolo Fontana，1499 或 1500—1557)宣布自己发现了三次方程的代数解法。费奥认为此项声明纯属欺骗，向塔塔利亚发起公开挑战，比赛方式是各出 30 个三次方程题给对方。限于当时的代数学水平，仅有如下两种类型的方程：

$$x^3+mx^2=n,x^3+mx=n,\text{其中 } m,n>0$$

结果塔塔利亚大获全胜，而费奥仅能解出后一种类型的方程。

后来，在米兰教书行医的学者卡尔达诺(Cardano，1501—1576)向塔塔利亚再三请求，得到了解三次方程的诀窍并发誓保密。塔塔利亚的解法实质是对变形的立方差公式代换后联立求解，即：

考虑$(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$，移项得$(a-b)^3+3ab(a-b)=a^3-b^3$；

对于形如$x^3+mx=n$类型的方程，可设$3ab=m, a^3-b^3=n$，联立得：

$$a=\sqrt[3]{(n/2)+\sqrt{(n/2)^2+(m/3)^3}}$$

$$b=\sqrt[3]{-(n/2)+\sqrt{(n/2)^2+(m/3)^3}}$$

于是$x=a-b$，就求得了方程的解。对于形如$x^3+mx^2=n$类型的方程，可通过代换令$x=y-m/3$，来消去二次项，转换为形如$y^3+py=q$类型的方程。

在三次方程解法被发现不久后，一般四次方程的代数解法也被发现了。1540年，有人向卡尔达诺提出一个四次方程的问题，由卡尔达诺的学生费拉里(Ferrari，1522—1565)解决了。解决的办法也是通过巧妙的变量代换，将四次方程转化为三次方程来求解。

1545年，卡尔达诺违背诺言，在德国纽伦堡发表了一部关于代数学的拉丁文巨著《大术》(Ars Magna)，书中公布了塔塔利亚关于三次方程的解法。卡尔达诺在书中注明三次方程的解法是塔塔利亚告诉他的，卡尔达诺自己也做出了开创性工作。他不仅将塔塔利亚的方法推广到一般情形的三次方程，而且还给出了几何证明(受古希腊传统的影响，只有给出几何证明才被认为是可靠的)。卡尔达诺还发现了三次方程的根与系数的关系，书中也公布了费拉里的四次方程的解法。

到了16世纪后期，虽然算法代数已经相当成熟，解决一般的三、四次方程已不成问题，但是符号的混乱和随意使用阻碍了学术交流。在数学符号系统的建设方面，韦达是最早有意识地、系统地使用字母的学者。

韦达与符号代数学

16世纪末，由法国数学家韦达开创的符号代数，导致代数学的重大变革，促进了代数学的进一步发展。

韦达(图2-5)，1540年生于法国丰特内，1560年取得法学学士学位并返回家乡当了律师，1574—1584年担任法国国王亨利三世的顾问，1589—1602年担任亨利四世的顾问，1603年卒于巴黎。

韦达是一位业余数学家，但却是法国16世纪最有影响的数学家，被称为“符号代数学之父”。1584—1589年赋闲在家期间，韦达研读了丢番图、塔塔利亚、卡

尔达诺等人的著作，发展了他们的思想，对符号代数学进行了深入的思考。他认识到只有把方程的数字系数变为字母系数，才能使所研究的方程具有更一般的形式。其后，韦达出版了数学史上第一部系统的符号代数学著作《分析引论》(1591)；同年完成了《论方程的整理与修正》(1615年出版)，在这部著作中提出了三、四次方程的一般解法。


图 2-5 韦达

韦达在《分析引论》中引进了一套符号规则。他用元音字母 A，E，I，O，U 以及 Y 表示未知量和变量。这一点具有重大意义，因为相对于以前谋求具体问题的具体解来说，引入未知量之后就可以使“未知量”(人们求解的目标值)参与运算，进而研究已知量、未知量、系数之间的关系。他用大写辅音字母表示已知量和常量，并称之为“系数”。韦达这部划时代的著作第一次划分了代数与算术的界限，他把计算分为两类，一种是以前的针对具体问题的数值计算，一种是他新开创的符号计算。

韦达采用的元音-辅音符号体系，使得他发展出了系统的方程解法。他提出了通用的方程理论，可以将各种不同的方程变换为有限的几种形式，然后再去寻找这几种形式的方程的解法。韦达的这一思想体现在他去世后出版的《论方程的整理与修正》中。为了求解二次方程，韦达确定了方程的系数与解的关系，现代教科书称之为“韦达定理”。对于三次方程，韦达指出所有的三次方程都可以简化为三种标准的形式，并给出了求这三种形式方程的解的方法：通过代换将方程转化为二次方程来求解。这一系列转化方法得到了广泛的使用，称为“韦达代换”。对于四次方程，韦达也给出标准形式，并给出了通过代换化归为低次方程的方法。

代数学一经符号化，计算对象就得到了推广。首先是由具体问题的特殊的数值推广到了一般的数；然后推广到可计算的量，这涉及到数系的拓广；最后推广到数、量之外的一般的对象，大大地扩展了代数学的研究领域。所以说韦达的符号代数思想重新定义了代数学的意义和目的，此后“代数学”就被看作是研究符号的计算、符号的公式变换，以及一般的代数方程求解的科学了。

代数方程理论

自从卡尔达诺《大术》(1545)公布三、四次方程的根式解之后，数学家们开始考虑高次方程的求解问题。一般的五次方程能否像二、三、四次方程一样，通过对方程的系数作加、减、乘、除和正整数方根运算(此种方法称为求根式解)而得到解

呢？在接下来的两个多世纪内，所有寻求这种解法的努力都失败了。

在这个问题上做出突破的是拉格朗日(J. Lagrange，1736—1813，图 2-6)。他出生于意大利都灵，19 岁时就在变分法创立方面做出了贡献而得到欧拉的赞赏，被任命为都灵皇家炮兵学校教授。1766 年到柏林接替欧拉，任普鲁士科学院数学部主任。1787 年到巴黎科学院工作，1813 年卒于法国。18 世纪后半期数学、物理学和天文学是自然科学的主体，拉格朗日在这三个学科上都做出了重大贡献。数学方面，在牛顿、莱布尼茨创立微积分之后，拉格朗日是仅次于欧拉的开拓者，他在变分法、微分方程、方程论、数论、函数和无穷级数等方面都有开拓性贡献。他是分析力学的创立者，把先前用几何方法讨论的牛顿力学变成了分析学的一个分支。他还是天体力学的奠基人，运用分析方法建立了各类天体的运动方程。



图 2-6 拉格朗日

18 世纪到 19 世纪初，五次代数方程的解法问题成了代数学的中心问题。拉格朗日第一个正式宣布"不可能用根式解四次以上方程"，他在 1770 年发表了长达 220 页的论文《关于代数方程解的思考》，讨论了二、三、四次方程解法的共同技巧，引进了置换和预解式的概念。拉格朗日研究了可以求根式解的方程的根之间的循环置换性质，发现能够找到一个"预解方程"，可以通过解一系列预解方程来求出方程的根，他说置换理论才是"整个问题的真正哲学"。拉格朗日对于四次及以下方程寻找低次预解方程获得了成功，但是解五次方程却需要解一个六次预解方程，因此他指出这对于五次及以上的方程是行不通的。但是拉格朗日没能给出这种不可能性的证明，称它"好像是在向人类的智慧挑战"。

半个多世纪之后，挪威一位年轻的数学家阿贝尔(N. H. Abel，1802—1829，图 2-7)解决了拉格朗日遗留下的问题。阿贝尔在中学时就自学了欧拉、拉格朗日等数学大师的著作，一度认为自己得到了一般五次方程的解，但在构造例子时发现了自己的错误，转而研究椭圆函数理论。四年之后他又重新研究五次方程求解的问题，并取得了成功。1824 年，年仅 22 岁的阿贝尔自费出版了小册子《论代数方程，证明一般五次方程的不可解性》，终结了一般代数方程求根式通解的企图，但是没有引起数学界的重视。阿贝尔引入



图 2-7 阿贝尔

了现在称为“域”的重要的代数学概念，同时阿贝尔还考虑了一些特殊的能用根式求解的方程。1825年阿贝尔大学毕业，申请了一笔经费出国游学，在柏林结识了工程师克雷尔(Crelle)。克雷尔对数学有浓厚的兴趣，于1826年创办了《纯粹数学与应用数学杂志》(又称《克雷尔杂志》)，第一卷刊登了7篇阿贝尔的文章，包括上述小册子的内容。《克雷尔杂志》头三卷共发表了阿贝尔22篇论文，包括方程论、无穷级数、椭圆函数等方面的开创性论文，至此欧洲大陆数学界才开始注意阿贝尔的工作。

阿贝尔的工作表明，对一般的五次及五次以上代数方程求根式解是不可能的，但是存在一些特殊的代数方程可以求根式解，如阿贝尔方程。到底什么样的方程才能够用根式来求解是数学家面临的新问题。这个问题稍后被一位同样年轻的法国数学家伽罗瓦(Galois，1811—1832，图2-8)解决。伽罗瓦在1829—1831年间完成几篇论文，建立了判别代数方程根式可解的充分必要条件，从而宣告彻底解决了方程根式可解难题。伽罗瓦引入了“群”的概念(方程根的置换群)，发现方程是否根式可解与它对应的群存在着本质联系。伽罗瓦给出“可解群”的概念，并证明方程根式可解当且仅当方程的群是可解群。在伽罗瓦之前，拉格朗日等人已深入研究过置换的概念，但只有到伽罗瓦引入全新的“群”的概念之后，才得以明确其中的本质联系，从而解决了包括欧拉、拉格朗日在内的许多大数学家都感到棘手的问题。伽罗瓦的工作可以看作是近世代数的开端，他不仅仅是解决了方程根式可解这样一个难题，更重要的是群的概念的引入导致代数学在对象、内容和方法上发生了深刻的变革。


图2-8 伽罗瓦

天妒英才，贫病交加的阿贝尔只活了27岁就去世了，伽罗瓦也21岁就在乱世的决斗中身亡了。他们两人的思想大大超越了他们所在的时代，以至于两人的工作在生前都没有能够被很好地承认。阿贝尔不仅在代数方程论、椭圆函数论等方面做出了奠基性工作，还在代数数论、数学分析、函数方程、分析基础、代数函数论等方面得到了开创性成果。伽罗瓦的成就也是在他去世14年后，才于1846年由法国数学家刘维尔在其主编的《纯粹与应用数学杂志》(又称《刘维尔杂志》)上首次介绍，杂志发表了伽罗瓦的两篇遗作。其后，塞雷(Joseph Alfred Serret)也在他的《高等代数学教程》(1849)中对伽罗瓦的工作加以介绍，并在第三版(1866)中予以系统的阐述。塞雷的著作被译成多种文字，对其他国家也产生了巨大影响，伽罗瓦工作的意义才逐渐为人们所认识。

19世纪后半叶，群论获得了迅速发展。同时，与代数方程解法问题、解析几何相关联的行列式理论、矩阵理论、二次型及线性变换的理论、不变量理论等，也都迅速发展着。到19世纪末，群论已经被应用到许多数学分支以及数学之外的领域，大有统一数学的趋势。代数学由于群的概念的引进和发展而获得了新生，它不再是研究如何求解代数方程，而更多的是研究各种抽象的"对象"的运算关系。19世纪中叶以后，这种抽象的"对象"层出不穷，为20世纪代数结构观念的产生奠定了基础。

抽象代数学

伽罗瓦的思想以及后来数学家关于群论的研究，不仅完满结束了以方程为中心的符号代数阶段，而且为抽象代数结构的研究打下了基础。20世纪初以来，随着数学的发展和出于其他学科应用的需要，代数学的研究对象和研究方法发生了巨大变革，数学家们开始研究公理化和抽象化的代数结构问题。即在抽象的集合上，定义某些运算、满足某些运算律，就构成了一个代数系统，例如群、环、域，等等。这些抽象对象来源于多个分支的研究，主要是方程论、代数数论、代数几何学、不变式论、四元数论、几何学等。20世纪30年代，范德瓦尔登的《近世代数学》出版，综合了当时抽象代数各方面的工作，标志着抽象代数初创时期已经结束，从某种程度上确定了后来代数学研究的特点及方向。在这部书中阐述了"什么是代数学"的观点：代数学是研究各种代数系统的科学。

二、变量数学的开端



古典数学在古希腊人完成奠基之后，进入到欧洲中世纪漫长的沉寂期，直到文艺复兴时期才迸发出新的活力。到了16世纪，常量数学的发展日臻完善，形成了大体完备的初等数学体系，其中包括算术、初等代数以及三角学等学科。进入17世纪之后，伴随着欧洲剧烈的社会变革，大量的应用需求产生了，在这些实际需求的驱动下，变量概念被引入，人们开始研究变化中的量与量的互相关系以及图形间的互相变换，变量数学得以发轫。变量数学以解析几何的建立为起点，而微积分学的发明则成为变量数学最为辉煌的成就。至此，数学进入古典高等数学的发展时期。

"数形结合"——解析几何的诞生

几何学，自古希腊以来长期占据着统治地位，使得几何学几乎成为数学的同义词，以至于有柏拉图宣称不懂几何者不得进入学园的说法。这个时期数学的研究对象主要是固定不变的图形和数量，它包括算术、初等代数、初等几何和三角等分支学科，形成了常量数学的概念。常量数学是描述静态事物的有力工具，而对于描述事物的运动和变化却往往无能为力。随着科学的发展，为几何寻求更为有效的思考工具以及更量化的研究方法变得迫切起来，解析几何学就在这个背景下应运而生。

1. 时代催生解析几何

"文艺复兴"运动起源于13世纪末叶的意大利，到了16世纪已经盛行于整个欧洲，作为一场思想文化运动，使当时的政治、社会、文化等各个方面都发生了影响深远的变革，从而揭开了近代欧洲历史的序幕。进入17世纪以后，"文艺复兴"运动的成果逐渐显现，一个崭新的欧洲开始崛起。

在"文艺复兴"运动中，人文主义思想盛行，它通过肯定人权和主张个性解放，对传统的神权发出挑战，宣扬摈弃中世纪的蒙昧主义宗教观，使得人们在理性思考的基础上建立起了新的思想体系。人文主义思想有力地推动和影响了宗教改

革运动，导致了以宗教名义进行的大规模战争。在长达一个世纪的时间里，欧洲大陆先后爆发了"胡格诺战争"、"三十年战争"和"俄士战争"，并由此形成了天主教、新教、东正教并存的宗教格局与近代欧洲国家的雏形。频繁的战争，使得军事技术得到空前发展，步枪、野战火炮在这个时期开始被广泛使用，弹道学、火药的控制以及弹药的装填等实用技术不断对科学研究提出新的需求，对动态物体进行准确的变量计算成为亟待解决的数学问题。

在摆脱了思想束缚之后，人们更加重视科学实验，先验论被否定，个人的潜力开始充分迸发出来。1623 年，英国通过了第一部保护新发明权利的专利法，个人的发明创造得到普遍尊重并第一次在法律层面得到保护。随之而来的是，一系列对后世影响深远的技术成果涌现出来，发明家们先后发明了谷物播种机、可以进行加减乘除的机械计算机、单摆机械钟，而用于矿井抽水的蒸汽机的出现，则是首次将蒸汽用作工业动力。这个时期技术进步的标志是机械设备开始得到普遍运用，而对机械运动的研究推动了变量数学的产生。

17 世纪，欧洲各国在航海、天文、力学、军事、生产等领域的科学技术快速发展，从自然科学角度提出的大量数学问题，迫使人们寻求解决变量问题的新方法，这成为解析几何学乃至变量数学产生的外部条件。

随着生产力的解放，制造业发展迅速，开拓海外市场与攫取更多的原料的欲望，极大地刺激了世界贸易的发展。17 世纪上半叶，荷兰凭借造船业和运输业的优势，在政府的有力扶持下，率先成为号称"海上马车夫"的海外贸易强国。17 世纪下半叶，伴随着实力的增强，英帝国开始经营印度次大陆和北美殖民地，逐渐取代了荷兰海上强国的地位。世界贸易的繁荣促使航海事业空前发达，而新航线的开辟以及船舶位置的测定，都需要进一步掌握天体运行规律，建立起准确的坐标、定位体系。

同时，科学本身的发展则创造了建立解析几何的内部条件。

解析几何思想的萌芽要追溯到古希腊时期，早在公元前 2 世纪，阿波罗尼奥斯(约公元前 262—前 190)就有坐标的思想；希帕雷斯(公元前 180—前 125)在解决地理中的几何问题时曾明确指出，地面上一点的位置可由两个数来确定。虽然此后的数学长期受到古希腊人独钟几何学的影响，使得代数学与几何学被严格割裂开来，但古希腊人的最初探索仍然意义重大。解析几何正是吸取了古希腊人正面(费马)和反面(笛卡尔)的经验得以发展起来的。

经过"文艺复兴"运动之后，欧洲人崇尚数学的思想复苏的同时，数学观和数学方法论也产生重大改变。除了重拾古希腊人严密的演绎逻辑的衣钵之外，他们把实验方法提高到真正科学的水平，同时又把实验方法和数学方法成功地结合起

来。在这种背景下，开普勒(J. Kepler，1571—1630)发现行星绕太阳运动的轨迹是椭圆，伽利略(G. Galileo，1564—1642)指出各抛射物体的运动轨迹是抛物线等，这些关于天体运动和物体运动的研究，彰显要用运动的观点来研究圆锥曲线和其他曲线。正是几何图形可以表示运动，启迪人们反过来把静止不变的几何图形视为变量运动的轨迹，这就引导数学发生了质的变化——由研究常量的初等数学进入了研究变量的高等数学。

数学符号化与代数学的发展则使几何方法与代数方法的结合成为可能。在16世纪末，初等数学不仅在几何上日臻成熟，在代数上也达到了相当完善的程度。1591年，法国数学家韦达(F. Vieta，1540—1603)著《分析术引论》，其中的许多代数问题是由解决几何问题演化而来，他系统地使用符号表示已知数与未知数，使代数学从一门侧重于计算的数学分支，演变为一门研究一般类型的形式和方程的科学。在17世纪初，韦达的学生格达拉底发表《阿波罗尼奥斯著作的现代阐释》和《数学的分析与综合》，通过对古希腊人"圆锥曲线论"的研究，详细讨论了用代数方法解决几何问题这个主题。1631年，英国的哈里奥特(T. Harriot，1560—1621)发表《实用分析学》，对韦达和格达拉底的思想进行引申和系统化。这些研究工作，为几何与代数的结合铺平了道路。

在各种条件的推动下，人们终于找到了用代数方法研究几何问题的途径，于是诞生了一门崭新的数学分支——解析几何，它将形与数统一起来，是数学发展史上的一次重大的突破。

2. "我思故我在"——笛卡尔



图2-9　笛卡尔

笛卡尔(René Descartes，1596—1650，图2-9)，出生在法国安德尔—卢瓦尔省的图赖讷拉海(现改名为笛卡尔以纪念这位伟人)，是法国著名的哲学家、物理学家、数学家、神学家。笛卡尔在哲学上自成体系，他的至理名言"我思故我在"，提出了"普遍怀疑"的主张。笛卡尔对现代数学的发展做出的重要贡献，是将几何坐标体系公式化，在数学史上具有划时代的意义，被认为是解析几何之父。

笛卡尔出生在一个从14世纪就定居在南土伦(Touraine)的传统贵族家庭，这使他自幼受到良好的教育，成人后随自己的兴趣潜心研究、四处游学，而不用担心经济来源问题。笛卡尔在1岁多时，母亲患肺结核去世，而他也受到传染，自幼体弱多病。在上学时，开明的校长为了让笛卡尔有更多的休息时间，特许他每天早上可以长时间卧床不起，这养成了他终生清晨卧床静思的习惯，他曾断言：在那些长长的安静的早晨所进行的沉思乃是他的哲学和数学的真

正源泉。1649 年 10 月，在女王克里斯蒂娜(Christina)的盛邀下，笛卡尔来到瑞典王宫开始他最后的讲学生涯。求贤若渴的瑞典女王要求每天早晨 5 点就和他见面，开始一天的功课，这彻底打乱了笛卡尔一辈子的晨思习惯，加之斯德哥尔摩寒冷的气候，他苦苦捱过了 4 个月之后，就在第二年染上肺炎，早早离开了人世。

1637 年，笛卡尔完成哲学巨著《方法论》(Discours de la méthode)，系统地阐释了他的“唯理主义”哲学，他的著名思想“我思故我在”就是出自于这部书。这部书包括 3 个著名的附录:《屈光学》、《气象学》和《几何学》，分别代表了笛卡尔在物理学、天文学和数学上的杰出成就。在《几何学》中，笛卡尔站在方法论的哲学高度上，认为希腊人的几何学过于依赖于图形，束缚了人的想象力，而把几何与代数的优点结合起来，才是一种“真正的数学”。在书中，笛卡尔通过几何图形数值化和平面直角坐标系的创立，找到了一座能连接几何与代数的桥梁，这部著作被公认为解析几何的开山之作。

笛卡尔首先引入了单位数的概念，使所有的几何量都统一于数的表示。他在任意选取单位线段的基础上，定义了线段的加、减、乘、除、乘方、开方等运算，用字母符号($a,b,c,\cdots$)表示线段。由于笛卡尔用线段表示积幂，就可以在几何中自由运用算术或代数术语。他用这些术语将一切几何问题化为关于一个未知线段(z)的单个代数方程:

$$z=b$$
$$z^2=-az+b$$
$$z^3=-az^2+bz+c$$
$$z^4=-az^3+bz^2+cz+d$$

在他看来，面积和长度都是数值，没有二次量和一次量之分，这就冲破了传统几何停留在“形”的观念上的束缚，为实现“形”与“数”的结合开辟了道路。同时，笛卡尔解除了捆绑在代数上的一条束缚——齐次原则。所谓的齐次原则是指古代用方程表示几何问题所必须遵循的原则:方程中各项的次数必须一致。根据齐次原则，体积、面积和长度居于不同的量纲，不能互加，因此表示几何量之间关系的方程，像方程 $ax^2+bx+c=0$ 就没有几何意义，因为 ax^2 是一个体积量，而 bx 和 c 又分别是面积量和长度量，它们不能相加。笛卡尔在引入单位数的概念之后，使得所有的几何量都通过单位量而变成统一的关于数的表示。于是，图形中的各种量之间的关系，都可以化成数之间的关系，这就解决了把代数与几何统一起来的一个关键问题。

笛卡尔通过解决帕普斯问题，建立起坐标系的概念。帕普斯(Pappus，300—约 350)问题见图 2-10:设在平面上给定4 条直线 l_1，l_2，l_3 和 l_4，过平面上的点 C

作四条直线分别与 l_1, l_2, l_3, l_4 交于点 P, R, Q, S，交角分别等于已知角 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 和 α_4，求使 $\frac{CP \cdot CR}{CQ \cdot CS}=k$（$k$ 为常数）的点 C 的轨迹，问题还可以类似地推广到 n 条直线的情形。帕普斯宣称，当给定的直线是三条或四条时，所得的轨迹是一条圆锥曲线。笛卡尔对此做了证明：

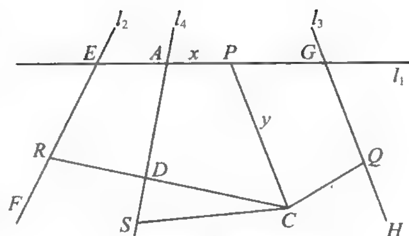


图 2-10　帕普斯问题

设 AP 为 x，PC 为 y，经简单的几何分析，他用已知量标出 CR, CQ 和 CS 的值，代入 $CP \cdot CR=CQ^2$（设 $k=1$），就得到一个关于 x 和 y 的二次方程：

$$y^2=Ay+Bxy+Cx+Dx^2 \qquad (*)$$

其中 A, B, C, D 是由已知量组成的简单代数式。于是笛卡尔指出，任给 x 一个值，就得到一个关于 y 的二次方程，从这个方程可以解出 y。如果取无穷多个 x 值，就得到无穷多个 y 值，从而得到无穷多个点 C，所以这些点 C 的轨迹就是方程（*）代表的曲线。在这个问题中，笛卡尔选定一条直线（AG）作为基线（相当于一根坐标轴），以点 A 为原点，从 A 点量起，x 值是基线的长度，y 值是另外一条线段的长度，该线段从基线出发，与基线交成定角，则该平面上任一点的位置都可以用 (x, y) 唯一确定，这样，笛卡尔建立了历史上第一个倾角坐标系。围绕着解析几何学的创立，笛卡尔给数学的发展留下了丰厚的遗产。

笛卡尔创立的解析几何，用运动的观点把曲线看成点的运动的轨迹，不仅建立了点与实数的对应关系，而且把“形”（包括点、线、面）和“数”两个对立的对象统一起来，建立了曲线和方程的对应关系。这种对应关系的建立，同时成为微积分创立的基础，使数学在思想方法上发生了伟大的转折——由常量数学进入变量数学的时期。正如英国著名哲学家密尔（J. S. Mill，1806—1873）所言：“解析几何使笛卡尔的名字载入史册，远胜于他的任何一项哲学泛论。解析几何是精密科学进步中所曾迈出的最伟大的一步。”

虽然笛卡尔的《几何学》笔法含糊，读起来晦涩难懂，还不能称为对解析几何的系统阐述，但他对几何和代数相结合的天才创见，为以后的数学家指明了新的研究方向。经典解析几何发展到完备的时候，已经是19世纪了。


图 2-11　费马

3. 业余数学家之王——费马

费马（Pierre de Fermat，1601—1665，图 2-11），出生于法国南部图卢兹附近的博蒙·德·洛马涅。费马是

名职业律师,数学研究只是他的业余爱好。费马一生从未受过专门的数学教育,但在数学领域的成就却是惊人的:解析几何的发明者之一,为微积分的诞生做出重要贡献,概率论的主要创始人,独撑17世纪数论天地,此外,费马对物理学也有重要贡献。著名的数学史学家贝尔(E. T. Bell)曾做出恰如其分的评价:费马是17世纪数学家中最多产的明星,更是"业余数学家之王"。

费马的家庭是财富与权势的结合,这在当时颇为流行,他的父亲在当地拥有相当丰厚的产业,他的母亲则是出身世家的"穿袍贵族"。相对于富裕的家境,费马更看重母亲的贵族头衔,在与表妹结婚后,他也能跻身贵族行列了,于是费马立刻在自己的姓名中间嵌入贵族的标志"de"。费马一生在官场上虽少建树,却官运亨通,直到进入国家中枢担任要职。但费马最令人称道的还是他在科学上取得的成就,而这些成就能对数学的发展产生重大的影响,很大程度上要归功于他的长子,正是因为他的长子在他去世之后积极整理、出版了费马的大量论著,他的科学成就才为世人所知。费马在1630年就完成了关于解析几何基本原理的论文,要早于笛卡尔,只是这篇论文发表于1679年,这已经是他去世14年之后的事了。而有趣的是在数论史上堪称惊艳之笔的"费马大定理"的提出,他特意写到:"我确信已发现了一种美妙的证法,可惜这里空白的地方太小,写不下。"引得后世数学家竞相研究,想重现费马的证明过程,直到1995年,才由英国数学家怀尔斯(A. J. Wiles)成功完成了定理的证明。

与笛卡尔批评并且打破了古希腊数学的传统不同,费马的主要目的是复兴并发展古希腊几何,因此他的研究具有古典主义色彩。在研究方法上两者也有很大不同,费马是从方程出发研究轨迹,笛卡尔在很大程度上是从轨迹出发求出它的方程,这体现了解析几何的基本原理的两个相反方面:前者是从代数到几何,后者是从几何到代数。费马从研究古希腊几何学家阿波罗尼奥斯的《平面轨迹》一书开始,并借用韦达用代数解决几何问题的作法,完成了8页纸的论文《平面和立体轨迹引论》(写于1630年,1679年出版)。在这篇论文中,费马确立了解析几何的两个基本思想:坐标思想以及通过坐标把代数方程同曲线相联系的思想。因此,费马是名副其实的解析几何创立者之一,理应与笛卡尔共享创建解析几何的荣誉。

在《平面和立体轨迹引论》一文中,费马通过建立坐标系,把平面上的点和一对未知数联系起来。如图2-12所示,他考虑任意曲线和它上面的任意点J,J的位置用A,E两字母定出:A是从点O沿底线到点Z的距离,E是从Z到J的距离。这就是现在所说的倾斜坐标,但y轴没有明显出现,而且不用负数。

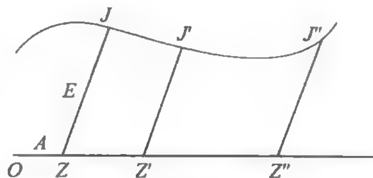


图2-12 倾斜坐标

这里的 A,E 现在表示为坐标 (x,y)。

在“坐标”的基础上，通过点动成线的思想，就可以把曲线用一个方程表示出来，费马把古希腊时期已得到的曲线都表示成了代数方程。他写到：“只要在最后的方程里出现了两个未知量，我们就得到一个轨迹，这两个量之一，其末端就绘出一条直线或曲线。”根据这个原理，费马指出了如下方程（用今天的符号表示）对立的图形：

$c(a-x)=by$	表示一条直线；
$b^2-x^2=y^2$	表示一个圆；
$a^2-x^2=ky^2$	表示一个椭圆；
$a^2+x^2=ky^2$ 和 $xy=a^2$	表示双曲线；
$x^2=ay$	表示抛物线。

他明确指出：一次方程表示直线，二次方程表示圆锥曲线，并且对方程：$x^m y^n=a$，$y^n=ax^m$ 的图形进行了说明。用代数方程来表示几何曲线，这正是费马的高明与成功之处。

费马的解析几何的局限性在于，他对纵坐标怎么依赖于横坐标注意不够，而且那时还没有负坐标，所以无法表示整个曲线。另外，受韦达的影响，费马还没有突破齐次原则的束缚，为了使二次方程有意义，他像韦达那样在常数项 c 的前面注明 c 是一个面积量，这点妨碍了代数与几何的统一。

费马的成就是多方面的。费马建立了求切线、求极大值和极小值以及定积分的方法，对微积分的贡献仅次于牛顿和莱布尼茨。费马最先提出数学期望的概念，从而建立了概率论的基础。“费马大定理”将不定方程的研究限制在整数范围内，从而开创了数论这门数学分支。费马在光学中突出的贡献是提出最小作用原理，也叫最短时间作用原理，从而把一个哲学的观念上升为科学理论。

解析几何学

常量数学可以有效地描述事物和现象的相对稳定的状态，而变量数学是描述事物的运动和变化规律的数学，从常量数学到变量数学，是数学在思想方法上的一次重大转折。解析几何学不仅把“数”、“形”统一了起来，而且引入了变量思想，使运动进入了数学，为微积分的诞生创造了先决条件，是变量数学建立的重要开端。

1. 解析几何学的发展历程

笛卡尔、费马提出解析几何的思想后，由于缺乏系统的阐述，并没有被当时的数学家普遍接受，许多大数学家都反对把代数、几何混淆起来。在经过了长期的

改进、补充和完善之后，解析几何学才真正成为数学的一个重要分支学科。

1649年，法国数学家范斯柯登（F. v. Coten，1615—1660）将笛卡尔的《几何学》翻译成通用的拉丁文，并阐述了笛卡尔关于代数方法的普遍性的方法论思想，克服了笛卡尔由于过分强调作图造成的解析几何思想不明显的缺陷，对于改进和补充解析几何的思想和内容起了积极的作用。这本书再版了几次，把笛卡尔的思想大众化，推动了解析几何的传播。

1655年，英国数学家沃利斯（J. Wallis，1616—1703）首先有意识地引进负的纵坐标、横坐标，使得解析几何研究的范围扩展到整个平面。受此启发，不久牛顿给出了平面内四个象限的作图法。1692年，德国数学家莱布尼茨（G. W. Leibniz，1646—1716）首先创用“坐标”一词，两年之后他正式使用“纵坐标”；而“横坐标”是由德国的沃尔夫（B. C. Wolff，1679—1754）在18世纪引入的。1635年，意大利数学家卡瓦列里（B. Cavalieri，1598—1647）首次利用极坐标系来解决阿基米德螺线内的面积问题，后由德国数学家赫尔曼（J. Hermann，1678—1733）在1729年完善了极坐标的概念，并提出应用极坐标研究曲线的方法，坐标法得到改善。

由于曲线方程概念的建立和坐标法的进一步完善，许多新的曲线陆续被发现，对曲线的研究进一步深入并扩充了曲线概念。1638年，笛卡尔发现对数螺线，并且了解了它的许多性质。1657年，沃利斯的学生奈尔和荷兰的范海拉特各自独立地发现平方抛物线、立方抛物线。1658年，法国数学家帕斯卡（B. Pascal，1623—1662）发现摆线。1665年，沃利斯发表《论圆锥曲线》，第一次将圆锥曲线定义为含 x 和 y 的“二次曲线”，并推导出各种圆锥曲线方程。17世纪六七十年代，意大利天文学家卡西尼（G. D. Cassini，1625—1712）发现卵形线。1694年，瑞士科学家雅各布·伯努利（Jocob Bernoulli，1654—1705）又先后发现了双纽线、对数螺线、悬链线、旋轮线。高次平面曲线则始见于牛顿在1704年发表的《三次曲线三枚举》。

从平面推广到空间是解析几何的一个重要发展。最初，笛卡尔已经提出过把解析几何推广到三维空间。1715年，瑞士数学家约翰·伯努利（Johann Bernoulli，雅各布·伯努利的弟弟，1667—1748）引进用三个坐标平面建立空间坐标系的方法，提出用三个坐标变量的方程表示曲面，此即空间解析几何。1844年，德国数学家格拉斯曼（H. G. Grassmann，1809—1877）首次提出了多维空间的概念。

18世纪，解析几何的发展开始逐步系统化。1748年，欧拉（L. Euler，1707—1783）发表《无穷分析引论》，给出了现代形式下的解析几何的系统叙述，这本书可以看作是现代意义下的第一本解析几何教程。书中，欧拉把曲面分成六种标准形式——锥面、柱面、椭球面、单叶和双叶曲面、双曲抛物面以及抛物柱面。解析几何的又一个重要发展是由18世纪的法国数学家拉格朗日（Joseph-Louis Lagrange，

1736—1813)推动的,1788 年他在《解析力学》中以类似后来的向量形式表示力、速度、加速度等有方向的量,并作了算术处理。虽然拉格朗日没有对向量概念作进一步推进,但是这个概念一经提出就引起了数学家与物理学家的注意,开始得到广泛应用。

"解析几何"(Analytic geometry)这个词,是由法国数学家拉克鲁阿(S. F. Lacroix,1765—1843)在 19 世纪开始正式使用的,他编写的解析几何教程再版了 25 次,到 19 世纪末还在使用。至此,经典解析几何作为一个学科开始走向成熟。

2. 解析几何学的意义

今天,解析几何学不仅广泛地应用于物理学和其他工程技术领域,而且已经渗透到各个数学分支,发挥着重要的作用。

(1)解析几何学改变了几何学。

解析几何开辟了几何代数化这一新方向,直接影响和改造了传统的几何学,扩大了几何学的研究对象,丰富和发展了几何学的思想方法。

传统几何学的主要内容是对几何图形进行定性研究,如直线的平行性、曲线的相交、图形的全等等。几何代数化的出现,使得图形性质的研究变成方程的讨论,而方程的研究又主要是数量上的分析,这就把几何学从定性研究阶段推进到定量分析阶段。

在传统几何学中,空间概念是在人们的社会实践活动中逐渐抽象和确立起来的,这种空间概念具有明显的直观性和经验性,如一维的直线、二维的平面和三维的立体。几何代数化的出现,使得空间的几何结构实现了数量化,而数量化了的空间几何结构已不再局限于一维、二维和三维,它可以是 n 维以至无穷维的,这就把几何学的空间概念从低维扩展到了高维,即把几何学研究的内容从现实空间图形的性质扩展到了抽象空间图形的性质。

(2)解析几何学是代数学的新工具。

解析几何使代数学获得了新的生命力。

几何学的概念和术语进入代数学,使许多代数课题具有了直观性。和几何学相比,代数学具有更高的抽象性,许多抽象的代数式和方程使人难以把握它们的现实意义。几何代数化的出现,为抽象的代数式和方程提供了形象而直观的模型。例如,可把方程的解看作是曲线的交点的坐标,可把二次方程根与系数关系的研究转化为考察和分析圆锥曲线与坐标轴的相对位置。

几何学思想方法向代数学的移植和渗透,开拓了代数学新的研究领域。例如,以线性方程(一次方程)为主要对象的线性代数,就是在线性空间概念的基础上构造起来的,这里的"线性"、"空间"等概念并不是代数学本身所固有的,而是从几何学中借用的。

(3)解析几何学是微积分创立的必要条件。

解析几何为微积分的创立准备了必要条件。几何代数化思想形成的标志是解析几何的创立，笛卡尔在创立解析几何过程中，不仅提出了代数与几何相结合的思想，而且把变数引进了数学。变数的引进，对于数学的发展有着极其重要的意义，特别是为微积分的创立准备了重要工具，加速了微积分形成的历史进程。从这种意义上看，可把解析几何的产生看作是微积分创立的前奏。

同时，解析几何也为近代数学的机械化证明提供了有力的工具。

(4)解析几何学是变量数学的开端。

变量数学是以解析几何的建立为起点的，微积分的创立则是变量数学最辉煌的发展阶段。变量数学的产生，是数学史乃至整个科学史上的一件大事，它对生产技术、自然科学以及数学自身的发展产生了巨大而深远的影响。

变量数学为自然科学描述现实世界的各种运动和变化提供了有效的工具。在现实世界中，“静”和“不变”总是暂时的、相对的，“动”和“变”则是永恒的、绝对的。因此，自然科学的研究对象是运动变化着的物质世界。变量数学的产生，为自然科学精确地描述物质世界的运动、变化规律提供了不可缺少的工具。变量数学对于现代生产技术、自然科学的发展，就像望远镜对于天文学、显微镜对于生物学的发展一样重要。

变量数学的产生，带来了数学自身的巨大进步。变量数学是在常量数学发展的基础上出现的，它的产生又反过来深深影响了常量数学的发展，特别是常量数学的各个分支学科由于变量数学的渗透而在内容上得到极大丰富，并由此产生了许多新的分支学科。解析数论和微分几何等分支学科，就是变量数学的思想方法向传统数论和传统几何渗透的产物。

三、变量数学的飞跃



解析几何的创立，将几何学代数化，把变量引进数学，开启了变量数学之门；而微积分的创建是变量数学发展的第二个决定性步骤，此后，变量数学成为分析物体运动和变化的有力工具。

微积分创建于 17 世纪下半叶，是微分学与积分学的总称。作为一种数学思想，微分就是“无限细分”，积分就是“无限求和”，两者互为逆运算。在微积分的发展过程中，它不但成为自然科学不可或缺的有力工具，还开辟了许多崭新的、广泛的数学领域。微积分是继欧氏几何后，数学史上最大的成就之一。今天，微积分已经成为数学的一门基础学科。

漫长的孕育期

早在古希腊时期，微积分的萌芽已经开始显现，而它发展成为一门学科，却是在 17 世纪下半叶，这个过程用了 2 000 多年。

1. 古人的贡献

在历史上，为了解决几何学中弧长、圆的面积和球的体积的计算问题，古人首先有了积分的概念，并找到了原始的积分方法，而微分学的真正起源则要晚得多。

早在公元前 5 世纪，工于逻辑推理的古希腊人便提出了“穷竭法”，计算出圆内接正多边形面积以“穷竭”圆面积。阿基米德进一步完善了“穷竭法”，并将其广泛应用于求解曲面面积和旋转体体积。

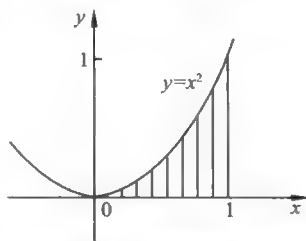


图 2-13 用“穷竭法”求曲边三角形的面积

阿基米德为了计算图 2-13 中阴影部分曲边三角形的面积，把底边分成 n 等分，分点的横坐标分别是 $1/n, 2/n, \cdots, (n-1)/n$，然后在每个分点处作底边的垂线，形成了 n 个近似矩形的窄条，把全部矩形条的面积相加，就可以近似得到曲边三角形的面积。

“穷竭法”是积分运算的最初探索，因此阿基米德也被认为是积分学的先驱。

中国古代数学家也多次涉及极限理论的研究。魏晋时期的刘徽(约225—约295)在《九章算术注》这部著名的数学专著中,曾提到"割圆术":"割之弥细,所失弥小,割之又割,以至于不可割,则与圆周和体而无所失矣。"他通过圆内接正多边形的面积去无限逼近圆面积,计算出圆周率 $\pi=3.1416$ 的结果,这在当时是了不起的成就。

2. 自然科学的新命题

16世纪以后的欧洲,"文艺复兴"运动带来了自然科学的快速发展,力学、天文学、地理学、物理学等诸多学科提出了大量前所未有的计算问题,对变量数学的产生和发展起到了巨大的推动作用。

(1)运动物体的轨迹问题:这个时期已经发现,行星围绕太阳运动的轨迹是椭圆,各种抛射物体的运动轨迹是抛物线,这就要求人们用运动和变化的观点来研究圆锥曲线,即把曲线看成是经物体运动而生成且随时间而变化着的轨迹。

(2)变速运动的速度和路程问题:传统数学对运动的研究主要局限于匀速运动,当物体运动发生变速时,必须建立距离和时间的函数关系,才能得出物体在任意时刻的速度和加速度;反过来,由物体的加速度和时间的函数关系,可以算出速度和距离。

(3)曲线在任意点的切线问题:在光学中,要研究光线在不同介质的传输时,涉及到光线在曲面上的反射角或进入另一个介质的折射角,这些角都和垂直于切线的法线有关,这就要求首先把曲线的切线求证出来。在力学中,运动物体在任一点的运动方向是运动轨迹的切线方向,把问题又归结到对切线的研究。

(4)变量的极值问题:物体运动时,需要求出在各种条件下距离所能达到的最大值或最小值。例如,炮弹运行的水平距离决定于发射角,要想达到火炮的最远射程必须算出合理的发射角。再如,行星运动时与太阳的距离是个变量,对近日点和远日点的计算也要涉及极值问题。

(5)求积问题:古希腊学者曾经通过"穷竭法"解决这类问题,但这个方法缺乏一般性,只能解决某些特殊问题。为了计算曲线长度、曲边形面积、曲面体体积、物体的重心、变密度物体的重量以及大质量物体之间的引力等,必须引进新的数学方法。

这些自然科学提出的问题,无一例外都是要求把"变量"作为研究对象,对这些问题的长期探索和深入研究,直接导致了变量数学的产生,并逐步建立起微积分理论。

3. 科学家的不懈探索

进入17世纪之后,为了给自然科学提出的大量问题找到新的数学工具,科学

家们付出了长期不懈的艰苦努力，他们总结前人经验，探索和研究新事物的规律，积跬步而致千里，为微积分的创立做了大量有益的准备工作。

杰出的德国天文学家开普勒(J. Kepler，1571—1630)，在发现行星运动的规律的同时，对面积、体积、重心、曲线长的研究也做出了有益贡献。1615 年，开普勒发表《测量酒桶的新立体几何》，论述了求圆锥曲线围绕其所在平面上某直线旋转而成的立体体积的积分法，以纠正啤酒商计算酒桶体积的误差。开普勒方法是用无限个同维的无限小元素之和来确定曲边形的面积及旋转体的体积。他把圆当作无限多个边的正多边形，从而把无限多个以圆心为顶点的等腰三角形面积之和计为圆面积，把球体看作由无限多个以球心为顶点的无限小圆锥组成而计算出球面积。在这本书中，他得出球的体积为球的半径乘以球面面积的三分之一($V=R\times4\pi\cdot R^2\times\frac{1}{3}$)，并求出近百个大部分是圆锥曲线所产生的旋转体的体积。他的著名的行星三大定律之一“面积定律”——在同样的时间里行星与太阳的连线在轨道平面上所扫过的面积相等，也是借助于这个近似积分的方法而得出的。不过，开普勒的积分方法缺乏严格性，而且主要是通过图形之间的变换来获得结果的，因而不具普遍性。

意大利数学家卡瓦列利(F. B. Cavalieri，1598—1647)，在 1635 年发表《用新方法促进的连续不可分量的几何学》，提出了著名的不可分量方法，即“卡瓦列利原理”。他把一个几何图形看成由比它低一维的几何元素所构成，低维就是高维的不可分量。如，直线是由排列均匀的点构成，面是由条数不定的等距离的平行线构成，立体是由等距的平行平面所构成，这种观点把连续量简单地归结为离散量。不可分量法的特点在于，不通过直接计算，而是从所求图形与已知图形不可分元素之间的比较中获得结果，是一种更一般的方法。1639 年，卡瓦列利利用平面上的不可分量原理建立了一些与积分运算等价的基本结果，包括整幂级数的积分公式$\int_0^a x^n\mathrm{d}x=\frac{a^{n+1}}{n+1}$，这使得早期积分学突破了体积计算的现实原型而向一般算法过渡，显示了其不可分量方法的巨大威力。作为一种更为普遍的积分方法，不可分量法克服了开普勒用各自不同的直线图形来表达曲边图形这一缺乏普遍性的缺点。

笛卡尔建立起来的解析几何学基本原理，给微分学问题的研究带来了代数方法，推动了微积分的早期发展。笛卡尔曾用“圆法”去求曲线的切线：为了求得函数在任意点的切线，笛卡尔先是做出一个以这个点的法线到 x 轴的距离为半径的圆，通过解出这个圆与函数相交的方程，得到切线的斜率。牛顿正是以研究笛卡尔的“圆法”为起点，开始了微积分的创立工作。

1637 年，费马提出了一种求极值和求切线的代数方法：以某两点间的距离去除这两点函数值的差，然后取消两点间距，能使所得结果为零的点，就是函数的极值点。费马甚至还将它用于求平面与立体图形的重心。费马的方法又称“费马引理”，是实分析中的一个定理，建立了求切线、求极大值和极小值以及定积分的方法，已经近似于现今微分学中所用的方法，只是表示自变量增量的符号不同而已。

英国数学家巴罗(I. Barrow，1630　1677)是牛顿的老师，他最先发现并肯定了牛顿的才华。1669 年巴罗发表的《几何学讲义》，包含了他对无穷小分析的卓越贡献，特别是其中的“通过计算求切线的方法”。与笛卡尔不同，巴罗使用了几何法，这就是后来的“微分三角形”，也叫“特征三角形”。据此可以求出切线的斜率，从而做出切线。巴罗的方法实质上是把切线看作割线的极限位置，并利用忽略高阶无穷小来取极限。而且巴罗最早察觉到求切线与求积之间的互逆关系，在书中他证明了现在符号意义下的等式$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x 2\mathrm{d}t = 2$。虽然巴罗是以几何形式来表达的，但已经十分接近微积分基本定理。

英国数学家沃利斯(J. Wallis，1616—1703)在 1655 年发表《无穷的算术》，系统推广了卡瓦列利等人的不可分量法。他用数的语言把几何方法算术化，使无限的概念以解析的形式出现，开辟了用级数表示函数的道路，使得无限算术代替了有限算术。沃利斯利用他的算术不可分量方法获得了许多重要结果，其中之一就是将卡瓦列利的幂函数积分$\int_0^a x^n \mathrm{d}x = \frac{a^{n+1}}{n+1}$推广到分数幂情形$\int_0^a x^{p/q}\mathrm{d}x = \frac{a^{\frac{p}{q}+1}}{\frac{p}{q}+1} = \frac{q}{p+q}\cdot a^{(p+q)/q}$(沃利斯仅对 $q=1$ 的特例给出了证明)；他还计算了四分之一单位圆面积，并由此得到圆周率的无穷乘积表达式。其间，沃利斯曾用到一种比较复杂的插值法。沃利斯的工作直接引导牛顿发现了有理数幂的二项式定理，在牛顿 1664—1665 年间的一本读书笔记中，可以清楚看出他是通过推广沃利斯插值法而得到这项成果的。牛顿二项式定理作为有力的代数工具在微积分的创立中发挥了重要的作用。

由于历史的局限，这个时期的数学家关注的是针对具体几何问题的解答方法，这一系列前驱性工作还不足以标示微积分作为一门独立学科的诞生。微分与积分，在当时被看作不同门类的问题进行处理，只有站在更高的高度上对这些分散的理论进行提炼和总结，微积分才能升华成一门独立的学科。

无穷小分析——微积分的诞生

17 世纪下半叶，牛顿和莱布尼茨分别以创造性的工作，沿着前人和同时代人所开辟的道路迈出了空前的一步，他们完成了微积分创立中最后也是最关键的一步。尽管他们两人的研究角度不同，牛顿从运动学角度出发，莱布尼茨则是侧重于几何学，但他们都解决了微分学的中心问题——切线问题和积分学的中心问题——求积问题，把两个之前并不相关的问题联系在一起，初步形成了微积分这一崭新的学科。

1. 科学的巨人——牛顿


图 2-14　牛顿

牛顿(Sir I. Newton，1643—1727，图 2-14)，出生于英格兰林肯郡伍尔索普庄园，是英国最著名的科学家，成就遍及近代科学的诸多领域。在力学上，他提出了牛顿三大运动定律；在天文学上，他发现了万有引力定律，这两项成就奠定了以后 200 年间经典物理学的基础。在数学上，牛顿与莱布尼茨分享了创立微积分学的荣誉。在光学上，牛顿提出了光的粒子理论，发现光的散射原理并由此发明了反射望远镜。在经济学上，牛顿推动了金本位制度的建立。在哲学和宗教上，牛顿的思想同样对后世产生了深远影响。

牛顿出生于 1643 年 1 月 4 日，父亲在他出生前三个月去世，因为母亲改嫁的缘故，牛顿幼年时和母亲关系并不融洽，他是在外祖母家长大的。牛顿的学校教育始于乡村学校，后来被送到了格兰瑟姆的国王中学，并成为了该校最出色的学生，尤为擅长做各种小实验。1661 年，牛顿进入剑桥大学的三一学院，先后完成大学和研究生的学习。大学里牛顿幸运地师从巴罗，在巴罗的指导下，他发现了广义二项式定理，并开始微积分学的研究。1669 年，在巴罗的推荐下，牛顿获得卢卡斯数学教授席位，时年仅 26 岁。1696 年，牛顿成为皇家铸币厂的监管，一直任职到去世，这期间他有效地打击了伪钞犯罪，并推动了金本位的实施。1703 年牛顿成为皇家学会会长和法国科学院的会员。1705 年，安妮女王授予牛顿爵士爵位。牛顿一生专注于学术研究，除了中学时偶发情愫，再也没有其他的罗曼史，终生未娶。1727 年 3 月 31 日，牛顿逝世，在威斯敏斯特教堂举行了国葬。英格兰诗人蒲柏(A. Pope，1688—1744)曾为牛顿写下了著名的墓志铭：Nature and nature's laws lay hid in night；God said "Let Newton be" and all was light(自然和自然的规律都隐藏在黑暗之中；上帝说：让牛顿出世吧，霎时变得一片光明)。

牛顿在剑桥大学学习时，伽利略、哥白尼、开普勒、笛卡尔和沃利斯等科学家

的学术思想引起他浓厚的兴趣，其中笛卡尔的哲学思想和研究成果对牛顿影响最大。正是这些科学家的思想光辉，引导牛顿走上了漫长的、成就丰硕的科学探索之路。牛顿曾经说过，如果说我能看得更远，那是因为我站在巨人的肩上。1665年，牛顿发现了广义二项式定理。不久，伦敦爆发瘟疫，学校关闭，牛顿不得不回到乡下的家中，一直到1667年春天学校复课。在这短短的18个月里，年轻的牛顿爆发了巨大的创造力，1666年完成《流数简论》，揭开了创建微积分学的序幕，而发现万有引力定律和光的散射原理也是在这个时期开始的实质性工作。

牛顿二项式定理是给出两个数之和的数次幂的恒等式，同时可以推广到任意实数次幂，即广义二项式定理。二项式定理公式$(a+b)^n=\sum_{r=0}^{n}C_n^r a^{n-r}b^r$中，$C_n^r=\frac{n!}{r!(n-r)!}$称为二项式系数。二项式定理是求解幂函数导数的基本工具，是微积分创立的必要准备条件。

牛顿对微积分问题的研究始于1664年秋，当时他对笛卡尔的“圆法”产生兴趣，并试图寻找更好的切线求法。1665年5月20日，牛顿在一页笔记里第一次提出“流数”（后来世人就以这天作为“微积分诞生日”），他将求解无穷小问题的方法统一为两类算法：正流数（微分）和反流数（积分）。1666年10月，牛顿将上述成果整理成论文《流数简论》，标志着微积分学的初步建立。在《流数简论》中，牛顿是从运动学角度来研究和建立微积分的，他把随时间变化的连续变量如速度叫作“流动量”，简称流量，把流量的变化率定义为“流数”，即流量的导数，同时把流量的无穷小增量定义为“瞬”。他在书中描述了两个基本算法：已知连续运动的路径，求给定时刻的速度（微分法）；已知运动的速度，求给定时间内经过的路程（积分法）；且两者互为逆运算。同样地，牛顿把这种算法推广到面积计算与求切线问题的互逆关系。在计算中，牛顿对“瞬”予以略去，把微积分建立在实数、函数和极限的基础之上。

《流数简论》标志着微积分的诞生，但它在许多方面还不成熟，在以后的岁月里牛顿继续改进和完善自己的微积分学说，先后完成了三篇论文。

在《运用无穷多项方程的分析学》（1669）中，牛顿利用无穷级数计算流数、积分及解方程。牛顿以无穷小增量“瞬”为基本概念，回避了《流数简论》中的运动学背景，将“瞬”看成静止的无穷小量，有时直接令其为零。

《流数法和无穷级数》（1671）是《流数简论》的直接发展。牛顿在其中又恢复了运动学观点，把时间看成是最基本的自变量，是衡量一切变化的标准尺度。文中用力学解释趋于零的变量。

《曲线求积分》（1691）是牛顿最成熟的微积分著作。牛顿在其中检讨了自己

以往随意忽略无限小"瞬"的做法，一改对无限小量的依赖，引入"最后比"概念，试图建立没有无穷小的微积分。他对"最后比"的解释相当于今天的"当增量 $\Delta x \to 0$ 时，比值$\frac{\Delta y}{\Delta x}$的极限为 $f'(x)$"的思想，该方法相当于求函数因变量与自变量变化之比的极限，因而成为极限方法的先导。牛顿还第一次引进流数记号：$\dot{x}$表示变量 x 的一次流数(导数)，$\ddot{x}$ 表示二次流数，$\dddot{x}$ 表示三次流数，往后依次类推。

牛顿在付出常人难以想象的艰辛努力之后，于 1687 年出版了《自然哲学的数学原理》。这是一部划时代的科学巨著，其宗旨在于从各种运动现象探究自然力，再用这些力说明各种自然现象，把物理学和数学成功结合了起来。牛顿在书中首次提出牛顿三大运动定律和万有引力定律，奠定了经典力学的基础。牛顿运用微积分工具，严格地推导证明了包括开普勒行星运动三大定律、万有引力定律等在内的一系列结论，并且将微积分应用于流体运动、声、光、潮汐、彗星乃至宇宙体系，充分显示了这一新数学工具的巨大威力。尽管牛顿发明微积分主要是依靠了归纳算法的能力，但这部书中的微积分内容却以几何语言写成。就数学而言，这种披在微积分上的几何外衣，使牛顿的流数术显得僵硬呆板，影响了 18 世纪英国数学的发展。

牛顿一直在学术上勤耕不辍。1696 年的一天，牛顿从造币厂回到家中，听说约翰·伯努利和莱布尼茨向全欧洲数学家提出了"最速降线问题"，当天晚饭后他就完成了求证。当伯努利看到这个正确而巧妙的解答时，立即断定只有牛顿才能在这么短的时间内给出答案，他惊呼道："呵！我从狮子的利爪中认出了它！"

2. 百科全书式科学家——莱布尼茨

莱布尼茨(G. W. Leibniz，1646—1716，图 2-15)，德国哲学家、数学家。在数学上，他是微积分发明者之一，经他使用的微积分的数学符号被广泛使用到今天。在哲学上，他的乐观主义最为著名，被认为是 17 世纪三位最伟大的理性主义哲学家。莱布尼茨对物理学和应用技术的发展也做出了重大贡献，他提出的概念涉及以后的生物学、医学、地质学、概率论、心理学、语言学和信息科学。同时，莱布尼茨在政治学、法学、伦理学、神学、哲学、历史学、语言学诸多方向都留下了著作。莱布尼茨是最早接触中华文化的欧洲近代著名学者，去世前完成了手稿《论中国人的自然神学》。莱布尼茨的著作约四成为拉丁文，约三成为法文，约一成五为德文，其著作是如此地繁浩，以至于到 2010 年，莱布尼茨



图 2-15　莱布尼茨

的所有作品还没有收集完全。

1646 年 7 月 1 日，莱布尼茨出生于神圣罗马帝国的莱比锡，12 岁时自学拉丁文，并着手学习希腊文。14 岁时进入莱比锡大学念书，20 岁时完成学业，并发表了他的第一部作品——哲学方面的《论组合术》。1666 年莱布尼茨拿到博士学位后，拒绝了教职聘任，开始了游走于权贵之间的生涯，这使他很容易地融进了巴黎的知识圈，并终生和欧洲大陆的著名学者保持良好关系，他的大量作品即存在于和这些学者的通信中。晚年时期，他的签名通常写成“von Leibniz”，以示贵族身份，但没有人确定他是否确实有男爵的贵族头衔。莱布尼茨最后服务于后来成为英王乔治一世的汉诺威公爵，1716 年 11 月 14 日莱布尼茨在汉诺威孤独地过世。

莱布尼茨是通过研究笛卡尔、费马、巴罗的著作，在和许多数学家的接触中开始从事微积分研究的。莱布尼茨的微积分思想最早体现在他 1673 年开始写作的《数学笔记》中，与牛顿流数论的运动学背景不同，莱布尼茨创立微积分首先是出于对几何问题的思考。1673 年，他因在帕斯卡的有关论文中“突然看到一束光明”，而提出了自己的“微分三角形”理论。在对微分特征三角形的研究中，莱布尼茨逐渐认识到了什么是求曲线切线和求曲线下面积的实质，并发现了这两类问题的互逆关系。他的目标，是要建立起一种更一般的算法，将以往解决这两类问题的各种结果和技巧统一起来。

1684 年，莱布尼茨发表他的第一篇微分学论文《一种求极大值与极小值和切线的新方法，它也适用于分式和无理量，以及这种新方法的奇妙类型的计算》，这是数学史上第一篇正式发表的微积分文献，以求函数的无限小增量为出发点，叙述了微分学基本原理。莱布尼茨在这篇论文中明确地给出了微分的定义，广泛采用了微分记号，并明确陈述了函数和、差、积、商、乘幂与方根的微分公式。这些都表明莱布尼茨非常重视微积分的形式运算法则和公式系统。

1686 年，莱布尼茨发表了他的第一篇积分学论文《深奥的几何与不可分量及无限的分析》，至此，莱布尼茨的微积分思想被公诸于众了。文中从求以曲线为界的图形面积出发得到积分概念。这篇论文初步论述了积分或求积问题与微分或切线问题的互逆关系。正是在这篇论文中，积分号第一次出现在印刷出版物上。

莱布尼茨是数学史上最伟大的符号大师之一，对符号的精心选择，是莱布尼茨微积分的一大特点。他曾经说过：“要发明，就要挑选恰当的符号，用含义简明的少量符号来表达意思和比较忠实地描绘事物的内在本质，从而最大限度地减少人的思维劳动。”他引进的符号体现了微分与积分的“差”与“和”的实质，后来获得普遍接受并沿用至今。他用拉丁文 *Summa*（求和）的第一个字母 S 的拉长—— $\int$ 表示积分，用 dx、dy 表示微分，这些沿用至今的符号对微积分的发展起了很大的

促进作用。莱布尼茨明确指出了“$\int$意味着和，d意味着差”的互逆关系，这种把积分和微分统一为互逆过程的思想，是他成为微积分学创立者的标志。

莱布尼茨的微积分与牛顿的相比较，其逻辑性与严密性要差些，但是他用精巧的符号来表达，却是牛顿所远远不及的。可以肯定，假如没有莱布尼茨的精巧而合理的符号，微积分就不可能成为如此有力的工具。

莱布尼茨在数学上的贡献是多方位的。1679年撰写的《二进制算术》，使他成为二进制的发明人，二进制系统在现代已经成为计算机设计的基础。有人认为莱布尼茨是拓扑学的奠基人，因为他认为“直线是曲线的一种，其任何部分都是和整体类似的”，而分形几何理论则在莱布尼茨的自相似性思想和连续性原理中寻找源头。

3. 微积分发明权的争论

微积分的产生是数学发展史上的重大事件，引领变量数学进入了一个全新的发展时期。正因为其意义重大，所以在牛顿和莱布尼茨的故乡英国和欧洲大陆之间发生了一场关于建立微积分优先权的争论。

在1699年初，英国皇家学会指控莱布尼茨剽窃了牛顿的成果，争论在1711年全面爆发，英国皇家学会后来发布调查报告，称牛顿是微积分真正的创立者，而莱布尼茨被斥为骗子。这场争论持续了一个世纪之久，造成了欧洲大陆的数学家和英国数学家的长期对立。英国数学界囿于民族偏见，在牛顿的“流数术”中停步不前，拒绝使用莱布尼茨发明的微积分符号，影响了英国数学至少一个世纪的发展。

其实，两位数学家开始并无过节。莱布尼茨对牛顿的评价非常高，他曾说过：“在从世界开始到牛顿生活的时代的全部数学中，牛顿的工作超过了一半。”牛顿在《自然哲学的数学原理》里也写道：“十年前在我和最杰出的几何学家莱布尼茨的通信中，我表明我已经知道确定极大值和极小值的方法、作切线的方法以及类似的方法，但我在信件中隐瞒了这方法……这位最卓越的科学家在回信中写道，他也发现了一种同样的方法。他并叙述了他的方法，它与我的方法几乎没有什么不同，除了他的措词和符号而外。”但在第三版及以后再版时，这段话被删掉了。

经过数学史家严肃考证和认真研究，一致认为牛顿和莱布尼茨二人基本同时、各自独立地创立了微积分。就发明时间而言，牛顿(1665)先于莱布尼茨(1673)；就发表时间而言，莱布尼茨(1684)则早于牛顿(1687)。因此建立微积分的光荣应同属于他们二人，微积分基本公式也被后人称为“牛顿—莱布尼茨”公式。

牛顿与莱布尼茨研究微积分的过程可以说是殊途同归。

牛顿由研究物理问题达到微分演算，微积分学的基本概念是力学概念的反映，如把变量看成是点、线、面作力学位移的结果。莱布尼茨则从切线问题入手，以哲学和几何学观点研究微积分。

牛顿认为用什么符号表示微分和积分无关紧要，而莱布尼茨却花费很多时间来选择富有提示性的符号。现在的微积分沿用了莱布尼茨所创设的符号。科学的微积分符号的创用对发展微积分是极为重要的。如果微积分一直使用着粗糙而不完整的记号，那它就不可能成为如今那样方便有力的工具。

牛顿更多的是关心创立微积分的体系和基本方法；而莱布尼茨则更关心运算公式的建立和推广，力求建立微积分的规范，即法则和公式的系统。

牛顿的工作是物理的、经验的、具体的、谨慎的，一些法则没有充分地推广，对普遍性的讨论较少。他担心微积分的严密性，宣布其归根结底是纯几何的自然延伸，这种谨慎、拘束的作法，使他的工作未能尽情发挥。莱布尼茨是思辨的、富于想象的，善于提炼普遍的运算规则并大胆加以推广。莱布尼茨思想开阔，毫不犹豫地宣布新学科的诞生，对其严密性的不足并不很担心。牛顿严谨的治学精神和莱布尼茨大胆的开创精神都是发展科学所必需的。

不管牛顿和莱布尼茨的研究方法有多么不同，经过两人的工作后，数学已不再像古希腊时代那样，所有内容都是几何学的一个分支或几何学的延伸，微积分成为一门崭新的独立学科——研究变量及其关系的数学。他们把微积分建立在符号运算的基础上，把一般方法应用于解决不同的几何和物理问题，从而建立起微积分基本定理。

微积分学的发展

微积分诞生之后，数学迎来了一个空前繁荣的时期，对 18 世纪的数学产生了重要而深远的影响。牛顿和莱布尼茨的微积分都缺乏清晰的、严谨的逻辑基础，这在初创时期是不可避免的，历史要求给微积分以严格的基础。

在微积分初期的发展过程中，出现了这样的局面：一方面是微积分创立之后在解决各个科学领域的具体问题上显示出无比的优越性，迅速在科学技术上得到广泛应用；另一方面以无穷小为基础缺乏严密的逻辑性，出现了越来越多的悖论和谬论。例如，牛顿在定义“流数”时，有时把无穷小量看作不为零的有限量而从等式两端消去，有时却又令无穷小量为零而忽略不计，那么这个无穷小量到底是不是零呢？这就是爱尔兰主教、哲学家贝克莱(G. Berkeley，1685—1753)提出的著名的贝克莱悖论。这种由于微积分基础的缺失而引发的危机，在数学史上称为

“第二次数学危机”。有的数学家甚至认为，微积分的演算不符合传统数学方法，逻辑上存在一定的问题，所以不管其有无实用价值应一概否定，主张把微积分从数学中开除出去。

为了解决“第二次数学危机”，数学家们作了大量的工作，其中法国数学家柯西(A. L. Cauchy，1789—1857)是起着承前启后作用的人。他用无穷小的极限来定义连续性，用极限和无穷小量来定义连续函数的导数，而无穷小量是用极限来定义的，这样一来，柯西把微积分理论的基础完全建筑在“极限”之上。他对极限概念给出了比较“严密”的数学形式的定义，从而使微积分有了一个初步的、能为大多数数学家所接受的逻辑基础。但在柯西的极限定义中，尚有许多不严格的地方，例如“无限趋近”、“想要多么小就多么小”、“一个变量趋于它的极限”之类的话不是严格的逻辑叙述，而是依靠了运动、几何直观的东西。

德国数学家魏尔斯特拉斯(K. T. W. Weierstrass，1815—1897)进一步改进了柯西的工作，把微积分奠基于算术概念的基础上。他认为“一个变量趋于一个极限”的说法还留有运动观念的痕迹。如果把一个变量简单地解释为一个字母，让字母代表它可以取值的集合中的任何一个数，这样一来，运动的观念就不见了。魏尔斯特拉斯用“$\varepsilon-\delta$”的语言对函数极限的定义作了精确的阐述。在数学史上，魏尔斯特拉斯对分析严格化的贡献使他获得了“现代分析之父”的美誉。

经过一个世纪的不懈努力，数学家们终于在严格的基础上重建了微积分。在18世纪，微分方程、变分法等新分支与微积分本身一起，形成了被称为“数学分析”的广大领域，与代数、几何并列为数学的三大学科，并且在这个世纪里，其繁荣程度远远超过了代数和几何。

微积分的发展历史表明了人的认识是从生动的直观开始，进而达到抽象思维，也就是从感性认识达到理性认识。人类对客观世界的规律性的认识具有相对性，受到时代的局限。随着人类认识的深入，认识将一步一步地由低级到高级、由不全面到比较全面地发展。人类对自然的探索永远不会有终点。

四、非欧几何与时空观的变迁



欧几里得几何，简称"欧氏几何"，自从在古希腊时期完成构建后，长期在数学领域居于统治地位，在社会和生产实践活动中，一直是解决各种应用问题的最有效的数学工具。尽管如此，欧氏几何并非无懈可击，随着人类科学探索的一步步深入，欧氏几何的瑕疵和局限性开始暴露出来，不断有数学家发起对欧氏几何的质疑和挑战。"非欧几何"的创建打破了欧氏几何一统天下的局面，从根本上改变了传统几何学的观念，并成为现代物理学时空观念的重要数学基础。

几何学的演变

几何学是数学中一门古老的分支学科，它的研究对象包括空间、图形及其数量间的关系。"几何"的名词最早来自希腊语，指的是"测地术"，拉丁语化为"geometria"，中文名词则是明代数学家徐光启在翻译《几何原本》时首创。

早在公元前 3000 多年前，古埃及人、古印度人和古巴比伦人（这个时期中国几何学的发展情况缺乏文字记载）开始把原始的几何原理，用于测绘、建筑、天文和各种工艺制作中，这是几何学最早的起源。到了古希腊时期，几何学得以发展和完善，最终形成了以公理为基础、演绎逻辑严密的学科体系。

1. 欧氏几何

欧几里得是古希腊几何学的集大成者。在古希腊时代，几何学几乎意味着全部的数学，欧几里得通过整理公元前 7 世纪以来古希腊几何积累起来的丰富成果，经过创造性的释疑和论证，编写完成了《几何原本》。他以五个公设为基础研究图形的性质，推导出一系列定理，并对量的一般理论和数论的问题进行了研究，通过公理化方法为几何学建立起严密的逻辑基础。欧氏几何是根据《几何原本》构造的几何学，建立在二维平面上的称为平面几何，建立在三维空间的称为立体几何，高维的空间称为欧几里得空间。

德国数学家希尔伯特（D. Hilbert，1862—1943）在 1899 年发表的《几何基础》中，修正了欧氏几何在逻辑严谨性上的缺点，成功地建立起欧氏几何完整、严谨的

公理体系，即所谓的希尔伯特公理体系。希尔伯特提出了公理建立的原则：共存性，在一个公理系统中，各条公理应该是不矛盾的，它们和谐地共存于同一系统中；独立性，公理体系中的每条公理应该是各自独立而互不依附的，没有一条公理是可以从其他公理引伸出来的。① 希尔伯特公理体系的建立使欧氏几何成为一个逻辑结构非常严谨的几何体系，也标志着欧氏几何完善工作的终结。

欧氏几何具备的鲜明的直观性和严密的逻辑演绎方法，使其成为始终保持着旺盛生命力的基础学科，至今仍是数学的入门经典课程。但由于欧氏几何适用的空间为低速、平直空间，当空间过渡到宇宙空间时，它的局限性就开始显现出来。可以说，欧氏几何是普遍规律的一个特殊情况。

2. **解析几何**

在欧氏几何创立 2 000 多年之后，数学史上终于迎来了一次里程碑式的进步，这就是解析几何的创建。17 世纪，笛卡尔通过建立坐标系，把代数方法引进几何学，借助于解析方程式进行图形研究，把图形的性质和参数以方程的形式表达出来，并由此引入变量的概念，最终形成了解析几何这一新的几何学分支。

发展到今天，欧氏几何的构造已经从最初的公理化方法，转而更多地通过解析几何来完成。解析几何使几何学表达问题和解决问题的能力大大提高，从而也就扩大了几何学的研究范围，产生了无穷维解析几何和代数几何等一系列分支，并与几何学的多个分支产生交叉。尽管如此，解析几何的研究基础仍未脱开欧氏几何的研究范畴。

3. **射影几何**

射影几何是研究图形经过射影变换后图形的不变性质的一门几何学。射影几何起源于古老的绘画和建筑艺术中的透视法，当我们用眼睛观察一个几何图形时，视觉中的图形（截景）与真实图形是对应一致的，但从直观上看，两者既不全等又不相似，甚至不会有相同的面积；换个角度观察也是如此。为了能在画布上准确再现目视的图形，人们开始了对图形射影性质的研究。

1639 年，法国数学家笛沙格（G. Desargues，1591—1661）发表的《圆锥曲线论稿》，是射影几何学的开山之作。笛沙格引进了无穷远点和无穷远线的概念，他断言“平面上任意两直线必交于一点”，即交于无穷远点（视点），而不平行线交于普通点。由此，他提出了笛沙格定理：若两个三角形对应顶点连线共点，则对应边交点共线。不管两个三角形是否在同一平面，定理成立，逆定理也同样成立，而且二

①关于公理的另一个原则是完备性，指的是公理体系中所包含的公理应该能证明本学科的任何新命题。完备性不是由希尔伯特提出的。

维和三维情况同样适用。如图 2-16 所示,点 O 为无穷远点,OA,OB,OC 为三条投影线,三角形 ABC 的一个截景为三角形$A'B'C'$,其中,AA',BB'和 CC'交于一点 O,AB 与 $A'B'$交于 Q,AC 与 $A'C'$交于 P,BC 与 $B'C'$交于 R,笛沙格证明了:Q,P,R 必在一条直线上,且交比在投影下是不变的。在书中,笛沙格提出的交比、对合、调和变程、透射、极轴、极点以及透视的理论,奠定了射影几何的基础。

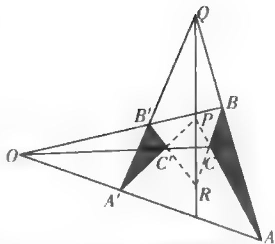


图 2-16　笛沙格定理示意图

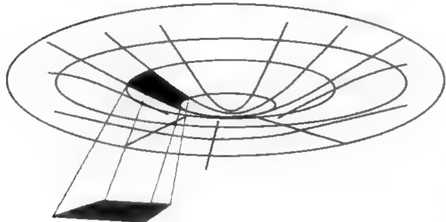
射影几何是对几何的定性研究,又被称为综合几何或纯粹几何。在笛沙格之后,在创立于同时期的解析几何的光辉掩盖之下,射影几何在当时并没有引起足够的重视。经过开普勒和帕斯卡的发展,到 19 世纪,在法国数学家庞斯列(J. V. Poncelet,1788—1867)和瑞士数学家施泰纳(J. Steiner,1796—1863)等人完善下,射影几何学的发展趋于完备,成为独立的几何学分支。从此,射影几何开始大放异彩,广泛应用到绘画、航空、摄影和测量各个方面。

射影几何学已经突破了欧氏几何关于平行和变换(平移、旋转)的概念,并由此衍生出仿射几何、画法几何等新的学科分支。

4. 微分几何

微积分的创建为研究光滑曲线和曲面提供了新的方法,从而诞生了运用微积分理论研究空间几何性质的数学分支——微分几何。

从 17 世纪开始,数学分析的方法被引入曲线和曲面的研究。1736 年,欧拉提出平面曲线的内在坐标的概念,以曲线弧长这一几何量作为曲线上点的坐标,从而开始了曲线的内在几何的研究。1807 年,法国数学家蒙日(G. Monge,1746—1818)出版《分析学在几何中的应用》,首先把微积分应用到曲线和曲面的研究中去,是第一本独立的微分几何专著。1828 年,高斯发表《关于曲面的一般研究》,明确了微分几何中最重要的概念和根本性的内容,例如曲面上曲线的长度、两条曲线的夹角、曲面上的某一区域的面积、测地线、测地曲率和总曲率等,建立起曲面的内蕴几何学。这一时期为古典微分几何发展时期。


图2-17　弯曲空间的局部看上去是平直的

德国数学家黎曼(B. Riemann,1826—1866)开创了现代微分几何的新局面。1854 年,黎曼发表《关于几何基础的假设》的演说,首先提出 n 维延伸量概念,研究具有黎曼度量的光滑流形,成为黎曼几何学的开端。黎曼几何完成了空间的划分,欧氏空间可以看作是黎曼空间在截面曲率为零时的特例(图 2-17)。

黎曼几何的高维空间理论及其运算方法成为广义相对论研究的有效数学工具。

通过对曲线、曲面乃至高维空间局部与整体几何性质的研究，微分几何与拓扑学、变分学、李群理论密切地联系在一起。这些数学领域与微分几何互相渗透，已成为现代数学的中心课题之一。

5. **非欧几何**

只要异于欧氏几何就可称为非欧几里得几何学（非欧几何）。作为一门大的数学分支，广义的非欧几何泛指一切与欧氏几何不同的几何学；狭义的非欧几何，专指罗巴切夫斯基几何（双曲几何）；而通常意义的非欧几何，则指罗巴切夫斯基几何和黎曼几何（椭圆几何）。

非欧几何起源于对欧氏几何中平行公设的探讨。罗巴切夫斯基提出下述假设取代平行公设："在平面上，过直线外一点可以作不止一条直线与这直线不相交"，由此推演出来一套与欧氏几何并无矛盾的几何学，被后人称为双曲非欧几何学。而黎曼又将平行公设修正为："在平面上，任何两条直线一定相交"，并将欧氏几何中的其他公设稍作改动，由此推演出椭圆非欧几何学。

我们可以这样通俗地理解，在我们身边的自然空间里，也就是在我们的日常生活中，欧氏几何是适用的；在描述宇宙空间或原子核世界时，罗巴切夫斯基几何更符合客观实际；在研究地球表面的航海、航空等实际问题时，用黎曼几何处理更准确。

6. **几何学的统一**

进入 17 世纪以后，几何学的研究获得爆发式发展，只要逻辑上互不矛盾的一组假设都有可能提供一组几何学，由此，诞生了众多门类的几何学，几何学呈现出众彩纷呈的局面。欧氏几何和解析几何的研究范畴是欧氏空间的几何结构，当开始关注弯曲空间下的几何结构时，产生了球面几何、罗巴切夫斯基几何等"非欧几何"；为了把感官外那些无穷远点引入到观察范围内，创建了射影几何；在深入分析弯曲空间的性质和度量（长度、面积等）时，微积分是必要的方法，导致了微分几何的诞生；微分几何发展到黎曼几何，研究对象扩展到了流形，由此又发展出了张量几何、复几何，等等。如何把门类众多的几何学进行分类，从而揭示出它们之间的内在联系和规律，成为当时数学界亟待解决的一个课题。

1872 年德国数学家克莱因（F. C. Klein，1849－1925）在埃尔朗根大学作了题为《关于近代几何研究的比较考察》的论文演讲，论述了变换群在几何中的主导作用，把到当时为止已发现的大部分几何统一在变换群论观点之下，明确地给出了几何的一种新定义，把几何定义为一个变换群之下的不变性质。这种观点突出了变换群在几何研究中的地位，后来简称为《埃尔朗根纲领》。

克莱因提出变换群的概念，把不同门类的几何学对应到不同的变换群，在相应变换群下，图形（某种元素的集合）具有不变性质，几何即关于这种群下的不变量的理论。每种几何学都由变换群所刻画，每种几何学所要研究的就是变换群下的不变量，而一门几何学的子几何学就是研究原来变换群的子群下的不变量。按照克莱因的观点，分别取变换群为运动群、仿射变换群、射影变换群，则隶属于各群的几何学分别是欧氏几何、仿射几何和射影几何。随后很快衍生出仿射微分几何学、射影微分几何学等分支。

《埃尔朗根纲领》的提出，是第一次对多门类几何学的系统总结，意味着对几何认识的深化。它把大多数几何化为统一的形式，使人们明确了古典几何所研究的对象；同时，显示出建立抽象空间所对应几何的方法，对以后几何的发展起了指导性的作用，有深远的历史意义。

几何学的突破——非欧几何的创立

在历史上很长的一段时期里，欧氏几何因其逻辑的严密始终保持着神圣的地位，不断有数学家满怀敬畏之心去求证欧氏几何的完美和正确。但当数学家开始破除迷信的桎梏时，欧氏几何毋庸置疑的地位就动摇了，而“非欧几何”的神密面目渐渐显现。

1. 欧氏几何的“家丑”

我们知道，《几何原本》中有五条公设被当作欧氏几何的基石，它们是：

(1)由任意一点到任意一点可作直线；

(2)一条有限直线可以继续延长；

(3)以任意点为心及任意的距离可以画圆；

(4)凡直角都相等；

(5)同平面内一条直线和另外两条直线相交，若在某一侧的两个内角的和小于二直角，沿这两条直线经无限延长后在这一侧相交。

其中，第5公设的文字叙述冗长，又不直观“自明”，而且欧几里得本人在证明其他命题时，也只仅仅使用过一次。种种蹊跷让人对这条公设产生怀疑：也许第5公设本来就是一个定理，只是因为欧几里得没能给出证明，才不得不把它放在公设之列。为了弥补欧氏几何的这一缺陷，有案可查的就先后有2 000多名数学家进行过求证，他们或者试图用其他公理来证明这条公设，使它变成一条定理；或者试图找到更好的替代公设。其中最著名的替代公设是“平行线公理”：过已知直线外一点，能且只能作一条直线与已知直线平行。在这之后，第5公设也被称为平行公设。

平行公设只是改变了第5公设的描述方式，为了求证它，数学家们付出了不

懈的努力，但每一次尝试最终都陷入了困境：或者推导还要依赖于平行公设，假设与结论等价；或者有某种其他形式的推理错误。所有尝试均以失败告终，以至于法国数学家达朗贝尔(J. le R. d'Alembert，1717—1783)叹道，平行公设是欧式几何原理中的家丑。平行公设因此成为长期困扰欧氏几何的梦魇。

在众多的数学家中，意大利人萨凯里(G. Saccheri，1667—1733)做出了值得注意的研究成果。1733年，萨凯里发表了《欧几里得无懈可击》，在书中他采用归谬法来证明平行公设。首先，他创立了一个类似矩形的萨凯里四边形 $ABCD$(图 2-18)，其中 $AD=BC$，且 $\angle A=\angle B=90°$。不用平行线公理，可容易地证明 $\angle C=\angle D$。萨凯里指出，当把有限图形扩大到无限时，顶角具有三种可能性并分别将它们命名为：

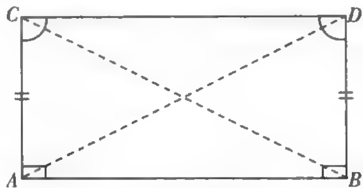


图 2-18　萨凯里四边形

(1)直角假设：$\angle C$ 和 $\angle D$ 是直角；

(2)钝角假设：$\angle C$ 和 $\angle D$ 是钝角；

(3)锐角假设：$\angle C$ 和 $\angle D$ 是锐角。

可以证明，直角假设与平行公设等价。萨凯里的计划是证明后两个假设为谬，再根据归谬法就只剩下第一个假设成立，使平行公设得到证明。萨凯里在假定直线为无限长的情况下，很快得出钝角假设为谬。在推导锐角假设时，萨凯里却发现了意想不到的现象：如果三角形三内角之和小于两个直角(双曲球面)，过给定直线外一给定点，有无穷多条直线不与该给定直线相交，这直接导致锐角假设为真的结论。

萨凯里囿于在有限远处不成立的东西在无限远处也不成立的思想，对于这一结论，以"结论不合情理"为理由武断地否定了，并在书末强调："欧氏几何无懈可击！"事实上，萨凯里的推导过程清晰合理，他的研究已经非常接近一个新的几何体系——非欧几何，但他没能突破传统思想的束缚，也可能是迫于当时教会的压力，以致于止步于伟大发现的门前。

值得注意的是，不能简单地做出第5公设正确与否的结论。在欧式空间下，无疑第5公设是成立的；而当第5公设被否定的时候，非欧几何出现了。

2. 非欧几何的艰难面世

欧氏几何诞生之后，在多数人眼中它已经成为绝对真理的一部分，在学术界形成了根深蒂固的观念，只要对欧氏几何产生怀疑，就被认为是对真理的亵渎，以致于在许多年中，与之相悖的任何思想都被拒之门外。非欧几何直接对欧氏几何提出挑战，甫一出现，就备受来自数学界、哲学界甚至教会的责难和非议，使它的

诞生历程格外艰辛。德国数学家康托尔(G. F. P. Cantor,1845 1918)曾对这种无知的保守做过激烈评述:一旦错误的结论被广泛接受,那么它将不会轻易地被放弃,而且对它所知越少,它的地位越牢固。

非欧几何公认由高斯、波尔约、罗巴切夫斯基各自独立发现。它产生于三位数学家的缜密思维,而不是人类的直观认识,在创立过程中三人都经历了不同的坎坷,在当时并不为世人认可,生前也未分享到创立者的荣誉。


图 2-19 高斯

高斯(J. C. F. Gauss,1777—1855,图 2-19),德国有史以来最著名的科学家之一,在数论、代数、数学分析、概率论、天文和物理等许多领域都有他的足迹。高斯是近代数学奠基者之一,以"高斯"命名的成果达 110 个,是数学家中之最,享有"数学王子"之称。

早在 1792 年,高斯开始研究平行公设,在经过不成功的尝试之后,他确认第 5 公设独立于其他公设,是不可证明的。高斯认为存在一种新的逻辑几何学。这种几何中,第 5 公设不成立;四边形的面积正比于 2 个平角与四边形内角和的差,并由此导出三角形的面积不超过一个常数,无论其顶点相距多远;内角和的亏量只有在很大的三角形中才能显露出来,为此高斯还测量了汉诺威公国境内布诺肯山、霍赫海根山和英色伯格山三座山峰构成的三角形内角,虽然他的测量因为仪器的误差而宣告失败,但已经明确提出三角形内角和的亏量正比于它的面积。1813 年,高斯最早命名了"非欧几何",他先是称新几何为"反欧几何"(abti-Euclidean Geometry)或星空几何,接着直接称为"非欧几何"(non-Euclidean)。从高斯开始,非欧几何被若隐若现地建立起来。

高斯笃信宗教,具有浓厚的保守倾向,同时,治学态度严谨,对不成熟的学术成果坚持宁缺毋滥,在公布时过度谨慎。慑于学术界对欧氏几何的崇拜和保守势力的气焰,也顾忌伤害到已有的学术地位,高斯在生前没有发表任何关于非欧几何的论著。人们是在他逝世后,从他与朋友的来往函件中得知了他关于非欧几何的研究结果和看法。

高斯对非欧几何另外两位发现者的态度则颇为耐人寻味。1831 年,在读完波尔约关于非欧几何的论文后,他的心情十分矛盾,给波尔约父亲的回信竟有些负气,他写道:"称赞他就等于称赞我自己。整篇文章的内容,您儿子采取的思路和获得的结果,与我在 30 年到 35 年前的思考不谋而合。"高斯的评语沉重打击了波尔约,他甚至一度怀疑高斯要剽窃自己的成果。1840 年,当高斯看到罗巴切夫

斯基的德文非欧几何著作《平行线理论的几何研究》后，他一方面私下在朋友面前高度称赞罗巴切夫斯基是"俄国最卓越的数学家之一"，并下决心学习俄语，以便直接阅读罗巴切夫斯基的全部几何著作；另一方面，他从不以任何形式公开评价罗巴切夫斯基的新几何思想。他积极推荐罗巴切夫斯基成为哥廷根皇家科学院通讯院士，却对罗巴切夫斯基在非欧几何上的成就避而不谈。可以说，高斯的保守，在嘲弄和打击面前缺乏勇气，使非欧几何的创立滞后了几十年。

波尔约・亚诺什(Bolyai János，1802—1860，图2-20)，匈牙利数学家。波尔约出生于一个科学世家，他的父亲波尔约・法尔科斯是一位有名望的数学、物理学、化学教授，而且是高斯的同学和终身好友。波尔约在数学上天赋异禀，少年时代便在父亲指导下，学习了微积分、分析力学等。1818年考入维也纳帝国工程学院，并用四年的时间完成了七年的课程。



图2-20 波尔约・亚诺什

1820年，波尔约开始了对平行公设的研究。他的研究遭到父亲强烈反对，老波尔约也曾经特别注重平行公设的研究，但探讨了大半辈子却徒劳无益，他不希望自己的儿子在一个毫无希望的研究方向上浪费时间、牺牲健康。波尔约不为所动，终于构造出一门独立的新几何，这是一种非欧几何，他把它称为"绝对几何"。1823年，波尔约完成了著名论文《空间的绝对几何学》。1831年，经波尔约再三请求，这篇非欧几何的开山之作被压缩为24页的论文，作为他父亲的著作《写给好学青年的数学原理》的附录，得以公开发表。

波尔约采用归谬法，经过不遗余力的严密推理，断言第5公设是一条独立的公设，他提出了新的平行公设替代第5公设：在空间的平面上，过直线外一点有一束直线不与原直线相交；当这束直线减少为一条时，该空间就是欧氏空间。波尔约的绝对几何与欧氏几何相比，主要有三个新内容：①"平行"是具有方向性的；②三角形内角和小于二直角，且其内角和可以任意小；③三种线束模型——平行线束(同向)、共点线束、超平行线束(同垂直于一直线)。他得到如下主要结论：①平行线的不变性；②平行线的对称性；③平行线的传递性；④过直线的线外定点，恒存在至少一条和直线共面的不交线；⑤两平行线在平行方向无限接近，在相反方向则无限远离；⑥同一直线的垂线与斜线不一定相交，因此过不共线三点不一定可作圆；⑦共面不交的两直线被第三直线所截，同位角(或内错角)不一定相等；⑧两三角形若有三内角对应相等，则两三角形必全等(即不存在相似而不全等的三角形)；⑨萨凯里四边形的上底角小于直角，这说明非欧平面上不存在矩形；

⑩非欧几何中存在“绝对的长度单位”。波尔约在绝对三角和球面三角方面也做了不少出色的工作，证明出非欧平面与半径为纯虚数的球面是相似的几何对象，这种正确的认识深化了非欧几何的研究，并推动了球面几何学的发展。

高斯在看过波尔约的论文之后，曾给他的父亲复信，信中虽夸奖波尔约是“头等品质的天才”，但并没有认可波尔约取得的成就。这让波尔约感到心情沉重，他认为高斯没有公开支持自己的发现是一个错误。当罗巴切夫斯基独立做出的同样成果发表后，他变得异常恼怒，彻底中断了对非欧几何的继续研究，并在1860年郁郁离世。

波尔约创立非欧几何的功绩是不可磨灭的，在他死后，论文(原文为拉丁文)先后在1867年被译成法文，1868年被译成意大利文，1872年被译成德文，1891年被译成英文，其成果被广泛传播和认可。1894年，匈牙利数学物理学会主持修复了他的墓地，供人瞻仰。1905年，匈牙利科学院高度表彰了他的功绩，颁发了以他的名字命名的国际数学奖，奖励那些为数学进展做出巨大贡献的人，庞加莱(1854—1912)、希尔伯特及爱因斯坦都曾获得这个大奖。

在非欧几何作为一门新几何学科的创立过程中，就内容的丰富以及论证的系统而言，要首推下面将重点介绍的罗巴切夫斯基。面对世俗的偏见，相对于高斯的保守、波尔约的消沉，罗巴切夫斯基对非欧几何始终不渝的捍卫更令人钦佩。

3. 罗巴切夫斯基几何

尼古拉斯·伊万诺维奇·罗巴切夫斯基(Н. И. Лобачевский，英文 N. I. Lobachevsky，1792—1856，图2-21)，俄罗斯数学家，哥廷根皇家科学院通讯院士。罗巴切夫斯基生于俄罗斯高尔基城一个土地测量员的家庭，少年时代便对数学发生浓厚的兴趣。由于掌握多门外语，他阅读了大量的外国数学家原著，并因此激发了数学研究的潜能。罗巴切夫斯基于1807年进入俄罗斯喀山大学，之后长期在这里求学、任教，先后成为教授(24岁)和校长(35岁)。



图2-21 罗巴切夫斯基

罗巴切夫斯基从1815年着手研究平行线理论。他试图通过总结前人的经验，给出第5公设的证明。在屡次失败之后，他产生了一个大胆的想法：可能根本就不存在第5公设的证明。于是，他创造性地运用反证法去否定第5公设，提出平行公设的否定命题：“过平面上直线外一点，至少可引两条直线与已知直线不相交”，并用这个否定命题和其他公设组成新的公理系统展开逻辑推演。经过缜密的推理，所有结果之间并不存在任何逻辑矛盾。罗巴切夫斯基意识到，这个新公

理系统构成了一种新的几何学，它的逻辑完整性和严密性可以与欧氏几何相媲美，而这个新的几何学的基础，就是对第 5 公设的否定。罗巴切夫斯基慎重地把这个新几何称之为“想象几何”。

1826 年 2 月 23 日，罗巴切夫斯基在喀山大学物理数学系学术会议上发布论文《几何学原理及平行线定理严格证明的摘要》，标志着非欧几何的诞生。罗巴切夫斯基的新几何思想不仅与欧氏几何冲突，而且还与人们的日常经验相背离，同事们并不能理解，他们以冷漠待之并一致反对。1829 年，罗巴切夫斯基发表论文《几何学原理》，对非欧几何进行补充和发展。这篇论文终于引起学术界的注意，但却遭到众多权威的猛烈嘲讽和攻击，就连已经窥得非欧几何真谛的高斯也不肯公开支持他的工作。著名哲学家黑格尔(G. W. F. Hegel，1770—1831)曾经说过：欧氏几何相当完备，“不可能有更多的进展”，这代表了当时学术界对非欧几何的普遍态度。孤独与无助并没有动摇罗巴切夫斯基的信念，他研究非欧几何的脚步从未停下来。他精心设计了检验大尺度空间几何特性的天文观测方案，并发展了非欧几何的解析和微分部分，使之成为一个完整的、系统的理论体系。他还用法文、德文发表自己的著作，尽量扩大非欧几何的影响。就在临去世的前一年，虽然双目失明，罗巴切夫斯基仍然通过口述由他的学生完成了最后一部巨著《论几何学》。

历史是公允的。19 世纪下半叶，长期无人问津的非欧几何开始获得学术界的普遍注意和深入研究，罗巴切夫斯基的独创性研究也因此得到学术界的高度评价和一致赞美。

罗巴切夫斯基发明的非欧几何后来被称为罗巴切夫斯基几何(罗氏几何)，又被称为双曲几何，它专门研究当平面变成双曲抛物面之后产生的特别现象以及与欧氏几何的差异。在双曲几何的环境里，平面的曲率是负数。图 2-22 中间为位于双曲抛物面上的三角形，右下方是两条罗氏几何的平行线。

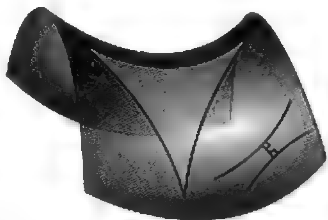


图 2-22　双曲抛物面的三角形

罗式几何除了用新的公设“从直线外一点，至少可以做两条直线和这条直线平行”来代替第 5 公设之外，完全采用了欧式几何的其他公设。因此，凡是不涉及到平行公设的几何命题，在欧式几何中如果是正确的，在罗式几何中也同样是正确的。在欧式几何中，凡涉及到平行公设的命题，在罗式几何中都不成立，并通过演绎推理引出了一连串和欧式几何内容不同的新的几何命题。可以通过下面的例子对比两者命题的不同：

欧氏几何	罗氏几何
同一直线的垂线和斜线相交；	同一直线的垂线和斜线不一定相交；
垂直于同一直线的两条直线互相平行；	垂直于同一直线的两条直线，当两端延长的时候，离散到无穷；
三角形内角和为两直角；	三角形的内角和小于两直角，直至趋于零；
存在相似的多边形；	不存在相似的多边形；
过不在同一直线上的三点可以作且仅能作一个圆。	过不在同一直线上的三点，不一定能作一个圆。

1868 年，意大利数学家贝尔特拉米(E. Beltrami，1835 -1899)发表《非欧几何解释的尝试》，用庞加莱模型、克莱因模型证明双曲几何与欧氏几何的相容性等价，指出非欧几何可以在欧几里得空间的曲面上实现。这就是说，非欧几何命题可以"翻译"成相应的欧几里得几何命题，如果欧几里得几何没有矛盾，非欧几何也就自然没有矛盾。至此，罗氏几何的基本思想才开始为人们所理解和接受。

非欧几何的时空观

非欧几何的创立，证明了数学存在着独立发展的逻辑体系，可以超前于人类对于现实世界的感知，并反过来推动人类对自然界的探索。在欧氏几何时代，数学与应用科学紧密结合，它来源于现实的直观经验，研究数学的终极目的也是为了解决实际问题。而通过逻辑演绎建立的非欧几何体系，完全超越了以往的经验，第一次使数学的发展领先于应用科学。下面我们可以看到，正是黎曼建立的黎曼几何，成为广义相对论产生的前奏和准备，进而彻底改变了人类的时空观。

1. 非欧几何的新高地——黎曼几何

德国数学家黎曼是近代数学史上里程碑式的人物。1854 年，黎曼发表《论作为几何基础的假设》的演讲，成为黎曼几何的开端，把非欧几何和微分几何推到了一个新的高度。同时，黎曼对复变函数论的发展也做出了重要贡献，奠定了他在数学分析上的重要地位。

黎曼几何又称椭圆几何，其公理体系引进了一种弯曲的几何空间(黎曼流形)，并建立起曲线坐标系中的微分方法，空间中的点用微分弧长度的平方所确定的正定二次型定义坐标，称黎曼度量。黎曼几何中空间可以类比为一个球面，直线可视为切割球面的大圆，如图 2-23 所示。黎曼几何中，平行公设被描述

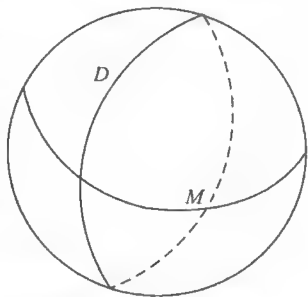


图 2-23　黎曼几何中的直线

为:在同一平面内任何两条直线都有公共点,不存在永不相交的平行线。同样,存在另一些公设:直线可以无限延长,但长度是有限的;三角形的内角和大于两直角和。

我们知道,两点之间的最短路线是直线,光线走两点之间的最短路线(短程线),放到黎曼几何空间去看则变成一段弧长,而不是我们通常意义上的直观直线。1919年5月,英国天文学家、物理学家爱丁顿(A. S. Eddington,1882—1944)率领考察队在西非的普林西比进行测量,发现星光经过太阳附近时确实发生了偏转,从而通过实验证明了爱因斯坦根据黎曼几何提出的光线弯曲的理论。

微分几何是黎曼几何建立的基础,其中一个基本问题是微分形式的等价性问题,它使张量分析成为黎曼几何学的核心内容。这表现为:①黎曼空间中的曲率是一个张量,其有关运算需采用绝对微分法;②黎曼空间的度量以度量张量表达;③黎曼空间的平行定义为标积保持不变(即平行被定义为与曲线的夹角保持不变);④黎曼空间的直线(短程线)方程的建立依赖协变微分。随着李群以及拓扑学的发展,精确的微分流形概念被确立,黎曼几何具备了强大的计算功能,从而摆脱了停留在逻辑构造层面上的束缚。

黎曼几何拓展了空间的概念,指出了几何学研究的对象应是一种多重广义量,并完成了空间的划分。截面曲率为常数的黎曼流形被称为常曲率黎曼空间,它包括了欧氏空间、球面空间、双曲空间。当曲率 $K>0$ 时,为黎曼球面空间;曲率 $K=0$ 时,为欧氏空间;曲率 $K<0$ 时,为罗氏双曲空间。

2. 非欧几何演变出新的时空观

1916年,爱因斯坦(A. Einstein,1879—1955)提出广义相对论,代表了现代物理学中引力理论研究的最高水平。广义相对论是爱因斯坦运用黎曼几何和张量分析工具,以几何语言描述的引力理论。广义相对论把引力描述为时空的一种几何属性(曲率);而这种时空曲率与处于时空中的物质与辐射的能量—动量张量直接相联系,其联系方式是一个二阶非线性偏微分方程组,即爱因斯坦的引力场方程:$R_{ab}-\frac{1}{2}Rg_{ab}=\kappa T_{ab}$。

广义相对论极大地改变了人类对宇宙和自然的“常识性”观念,把物质、时间与空间统一起来,提出了全新的时空概念。

罗氏几何诞生之后发展缓慢,在经过与黎曼几何的结合之后才真正展现出其实用性。美国数学家米尔诺(J. Milnor,1931—)曾经说过,罗氏几何在黎曼几何出现前只是没手没脚的躯干而已。从贝尔特拉米开始,推导出在伪黎曼球面可以实现双曲几何的模型,赋予了罗氏几何强大的计算功能,它才逐渐成为分析宇宙

空间和原子核世界的有效的数学工具。

3. 从假设到现实——非欧几何的意义

非欧几何的出现，改变了几千年来人们意识中的“欧氏几何是唯一的几何”这一根深蒂固的观点，不仅为新几何学开辟了道路，而且使人类终于突破感官的局限，迎来现代数学和现代科学的大发展。可以说，非欧几何诞生的意义超越了数学单一学科。

非欧几何的创立，第一次使数学的发展领先于实用科学，反映出数学的发展具有相对独立性。数学科学立足于自身的逻辑体系，可以超越社会实践，独立于自然科学，演绎出超前的数学理论，并反作用于应用领域，推动数学乃至整个自然科学向前发展。自此，数学的发展有了两个方向，一个是以严格、抽象和美丽著称的纯粹数学，另一个则是着力为自然科学提供计算工具的应用数学。

从非欧几何学形成学科体系，我们看到数学的本质是自由的又是相容的。平行公设的禁锢一旦被打破，数学家们开始自由自在地进行思考，创立了门类众多的非欧几何学，极大丰富了几何学本身，也为应用科学提供了更多有效的工具。同时，非欧几何对欧氏几何提出的挑战，并不是非此即彼的简单否定，从克莱因对几何的相对统一，到黎曼推导出欧氏空间是黎曼空间的特例，每种几何学都可以找到其公理成立的逻辑条件，相互之间又存在内在联系。进入现代，几何学已经形成欧氏几何、非欧几何、射影几何、微分几何、拓扑学等多个分支，它们既有各自独立的公理体系，又相互渗透，共同发展。

非欧几何的诞生和发展过程曲折而又艰辛，是数学家向传统挑战、为科学献身的精神的产物，对今天的科学探索仍有借鉴意义。人们最初是出于完善欧氏几何公理的目的来研究平行公设的，但受制于对欧氏几何的迷信，2 000 余年始终没有新的进展，直到在质疑中运用创新思维才终于有了突破。我们看到了高斯的预见性和波尔约的另辟蹊径，尤为可敬的是罗巴切夫斯基对真理矢志不渝的坚持。只有突破了对传统、对权威的迷信，才能充分发挥科学的创造性；只有不畏艰难困苦，勇于为科学献身，才能发现、捍卫超越时代的真理。



下 篇

现代数学



一、希尔伯特问题——数学家的菜谱

希尔伯特的23个问题

1900年8月8日上午，正在法国巴黎举行的第二届国际数学家大会会场中，有位38岁的数学家登上讲坛，开始他题为《数学问题》的演讲：

“我们当中有谁不想揭开未来的帷幕，看一看在今后的世纪里我们这门科学发展的前景和奥秘呢？我们下一代的主要数学思潮将追求什么样的特殊目标？在广阔而丰富的数学思想领域，新世纪将会带来什么样的新方法和新成果？”

接下来他在演讲中提出了23个问题，成了为20世纪乃至21世纪整个数学界打造的菜谱，他就是大名鼎鼎的大卫·希尔伯特(David Hilbert，1862—1943，图3-1)。



图3-1　希尔伯特

希尔伯特在演讲的前言和结束语中，对各类数学问题的意义、起源及研究方法发表了许多精辟的见解，整个演说的主体则是提出23个问题。希尔伯特说：通过这些问题的讨论，我们可以期待科学的进步。希尔伯特的演讲获得了极大的成功，各国的数学杂志纷纷转载。在提出这些问题后的一个多世纪里，这些问题激发着数学家们浓厚的研究兴趣，对20世纪数学的发展起了巨大的推动作用。现在这些问题已被数学家们约定俗成地称为“希尔伯特第1问题”直至“希尔伯特第23问题”。一个数学工作者只要解决了23个问题中的任何一个，就足以使自己名垂数学史。20世纪被称为希尔伯特的时代，正是他通过自己的工作，开创了20世纪初那个数学大发展的黄金时期。他推动了一个时代的数学发展，使得他的后继者们所走的道路，几乎都可以追溯到他的开创。

他的23个问题中，有6个数学公理基础问题、6个代数数论问题、6个代数与几何问题和5个分析问题。希尔伯特解释了每个问题之所以作为一个重要的数

学议题呈现在这里的原因。他认为每个问题的解决都会产生一个照亮特殊领域和相关概念的理论,他坚持众多绝妙问题的存在正是数学学科健康发展的证据。国际数学界作出热烈回应,欣然接受了希尔伯特具有远见卓识的难题。具体这23个问题及解决现状是:

1.康托尔的连续统基数问题(已解决)

1874年,康托尔猜测在可数集基数和实数集基数之间没有别的基数,即著名的连续统假设。1938年,奥地利数理逻辑学家哥德尔证明连续统假设与策梅罗—弗兰克尔集合论(ZFC)公理系统的无矛盾性。1963年,美国数学家科恩(Choen,1934—)利用力迫法证明连续统假设与策梅罗—弗兰克尔公理彼此独立。因此连续统假设成为一种既不能证明又不能推翻的现代逻辑工具,在这个意义下,问题已经解决。

2.算术公理系统的相容性(已解决)

欧氏几何的相容性可以归结为算术公理的相容性。希尔伯特曾提出用形式主义计划的证明论方法加以证明,虽然哥德尔1931年发表不完备性定理对此作出了否定,但仍有一些数学家试图通过放宽对形式化的要求来确立形式系统的相容性。1936年,希尔伯特的学生根岑(Gentzen,1909—1945)在允许使用超限归纳法的情况下证明了这一结论。

3.两个等底等高的四面体体积相等(已解决)

这个问题是问:已知两个多面体,能否把其中一个多面体分割成有限块再将之结合成另一个?它是23个问题中最简单的一个,提出不久后就由希尔伯特的学生、德国数学家德恩(Dehn,1878—1952)在1900年解决。他通过一个反例证实了不可能用割补的方法证明两个等底等高的四面体的体积相等。

4.直线作为两点间距离最短的问题(已解决)

满足此性质的几何很多,因而需要加上某些限制条件。希尔伯特之后,许多数学家致力于构造和探索各种特殊的度量几何,在研究此问题上取得很大进展。1973年,前苏联数学家波戈列洛夫(Pogorelov,1919—2002)宣布,在对称距离情况下,问题获得解决。

5.拓扑群成为李(Lie,1842—1899)群的条件(定义群的函数的可微性假设条件去掉)(已解决)

这一问题简称连续群的解析性,即是否每一个局部欧氏群都一定是李群。1952年,由美国数学家格里森(Gleason,1921—2008)、蒙哥马利(Montgomery,1909—1992)、齐宾(Zippin,1905—1995)共同解决。1953年,日本数学家山迈英彦得到完全肯定的结果。

6. 物理学各分支的公理化(部分解决)

1933 年,前苏联数学家柯尔莫戈洛夫(Kolmogorov, 1903—1987)将概率论公理化。随后,在量子力学、量子场论、热力学等领域,公理化方法也获得巨大成功,但一般而言,物理学各个分支能否全盘公理化,公理化的物理学又意味着什么,仍是需要探讨的问题。

7. 某些数是无理数或超越数的证明(有重大进展)

这个问题是:如果 b 是无理数,a 是非 0 或 1 的代数数,那么 a 的 b 次方是否是超越数?前苏联数学家盖尔丰德(Gelfond,1906—1968)于 1929 年、德国数学家施耐德(Schneider,1911—1988)和西格尔(Siegel,1896—1981)于 1935 年分别独立地证明了其正确性。其中 1934 年提出的盖尔丰德—施耐德定理成为大量构造超越数的经典理论。

8. 素数问题(未解决)

素数是一个很古老的研究领域。希尔伯特在此提到黎曼猜想、哥德巴赫猜想以及孪生素数问题。黎曼猜想至今未解决,哥德巴赫猜想和孪生素数问题目前也未最终解决。在这一领域,我国数学家做出了非常出色的工作。

9. 一般互反律在任意数域中的证明(部分解决)

这个问题在 1921 年由日本数学家高木贞治(1875—1960)、1927 年由奥地利数学家阿廷(Artin,1898—1962)各自给出部分解决,而类域理论至今还在发展之中。

10. 丢番图方程可解性的判定(已解决)

整系数代数多项式方程被称为丢番图方程。对于简单的丢番图方程,整数解是否存在是容易判断的,然而对于一般的丢番图方程来说,判断它是否有整数解却是件极困难的事(其中最著名的例子就是费马猜想)。此问题的核心是:能否通过有限步骤(或算法)来判定一般的不定方程是否存在有理整数解?这个问题困扰了数学家很长时间。1950 年前后,美国数学家戴维斯(Davis,1928—)、普特南(Putnam,1926—)、罗宾逊(Robinson,1919—1985)等人携手取得关键性突破。这一问题最终在 1970 年由 23 岁的前苏联数学家马蒂亚塞维奇(Matiyasevich,1947—)解决,他出色地证明了:在一般情况下,这样的算法是不存在的。尽管得到的是否定结果,但在此问题解决的过程中却产生了一系列很有价值的副产品,其中不少和计算机科学与逻辑学密切相关。

11. 系数为任意代数数的二次型(已解决)

德国数学家哈塞(Hasse,1898—1979)在 1923—1924 年间解决了有理数部分,而实数部分则由西格尔在 20 世纪 30 年代解决。

12. 阿贝尔域上的克罗内克定理在任意代数有理域上的推广(已解决)

高木贞治在 1920 年将类域的定义做了推广,证明了一个代数数域的任何阿贝尔扩张都可以表示为该数域上的类域,从而创立了类域论,实现了“克罗内克青春之梦”。由此问题衍生出的朗兰兹(Langlands,1936—)纲领,则还远未解决。

13. 不可能用仅有两个变量的函数解一般的七次方程(部分解决)

一般的七次方程 $x^7+ax^3+bx^2+cx+1=0$ 的根依赖于 3 个参数 a,b,c,这一方程能否用二变量函数表示出来?这个问题的一种变形即连续实函数形式,已经在 1957 年由前苏联数学家阿诺德(Arnold,1937—)和柯尔莫戈洛夫证明是不可能的,1964 年维土斯金(Vituskin)将其推广到连续可微情形,然而对于解析函数情形则尚未解决。

14. 证明某些完备函数系的有限性(已解决)

这一问题探讨的是某些函数域中的子环的有限性问题。这是一个与代数不变量问题相关的问题。1959 年日本数学家永田雅宜(1927—2008)通过构造出一个漂亮的反例给予否定的解决。

15. 舒伯特枚举算术的严格基础(有重大进展)

这个问题的实质是建立代数几何学的基础,分为两个部分:第一部分是舒伯特(Schubert,1848—1911)算术,第二部分是枚举几何。前者已经由荷兰数学家范德瓦尔登(Van de Vaerden,1903—1996)在 1938—1940 年间给出了严格的论证,而后者关系到舒伯特的“数量守恒原理”,这涉及某些相交数在连续变形下的不变性。后者出现许多代数几何的记数问题,严格的基础至今仍未建立,因此问题只能算部分得到解决。不过代数几何的严格基础已由范德瓦尔登和法国数学家韦依(Weil,1906—1998)建立起来。代数几何在 20 世纪是一门对各方面都有巨大影响的主流学科,它的基础已经建立在交换代数学的基础上。

16. 代数曲线和曲面的拓扑结构(有重大进展)

此问题涉及两个部分,前者是实代数曲线与曲面的拓扑结构,后者是极限环的拓扑结构。在一个世纪的研究中,出现了许多有意义的成果,但总体来说距完全解决仍然很遥远。目前,曲面拓扑的最佳结果是 20 世纪 90 年代中期法国数学家埃托恩伯格(Ilia Itenberg)和俄罗斯数学家威罗(Oleg Viro)做出的,而在极限环方面领先的则是 90 年代初俄罗斯数学家伊利亚申科(Yulij Ilyashenko)和法国数学家埃科勒(Jean Ecalle)的研究成果。

17. 正定形式的平方和表示(已解决)

这个问题是问:如果实系数有理函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 对任意数组 $x_1,\cdots,x_n$ 都恒大于或等于 0,是否可以确定 f 都能写成有理函数的平方和?该问题首先在

1927 年由阿廷肯定地解决了关于实封闭域的部分，而所需型的数值上界则在 1967 年由德国数学家普菲斯特(Albrecht Pfister)给出。

18.用全等多面体构造空间(已解决)

该问题共有三问。第一问：n 维欧氏几何空间是否只允许有限多种两两不等价的空间群？这一问题已由德国数学家比伯巴赫(Biberbach，1886—1982)于 1910 年解决。第二问：是否存在一个能填满整个空间的多面体，但其本身并非某个群的基本域(即不规则多面体能否填满空间)？莱因哈特(Reinhardt)于 1928 年圆满解答了三维空间的部分，二维空间上问题的解决则要归功于德国数学家希斯(Heesch，1906—1995)。第三问：在 n 维欧氏几何空间中最佳的装球模式(使空隙最小)是什么？即著名的开普勒猜想(Kepler Conjucture)。此问题在其研究过程中发展成为十分活跃的领域，最终在 21 世纪来临之际被完全证明。

19.正则变分问题的解是否必定是解析的(已解决)

这个问题在 1904 年由数学家伯恩斯坦(Serge Bernstein)解决，他证明了符合某些条件的椭圆偏微分方程的解必是解析的。在此证明出现后，希尔伯特第 19、20 及 23 问题被整合，并且有了相当程度的推广。

20.一般边值问题(有重大进展)

偏微分方程边值问题的研究自提出之日起获得了蓬勃发展，成为 20 世纪一个重要的数学分支，目前在非线性偏微分方程领域内已经获得了巨大的成功。

21.具有给定单值群的线性微分方程解的存在性证明(已解决)

此问题也被称为黎曼—希尔伯特问题，属线性常微分方程的大范围理论。其表述为：如果我们容许明显的奇异点(即：其单值群是平凡的)，并在复流形上的向量丛及其联络的意义下理解福克斯(Fucas)方程，则答案是肯定的；否则存在反例。希尔伯特本人于 1905 年、德国数学家罗尔(Rohrl，1927—)于 1957 年分别得出重要结果。1970 年比利时数学家德利涅(Deligne，1944—)做出了出色贡献。而阿诺索夫(Anosov)和鲍里布鲁克(Bolibruch)则在 1994 年给出了反例。

22.通过自守函数将解析函数单值化(有重大进展)

此问题涉及艰深的黎曼曲面理论，1907 年德国数学家克贝(Koebe，1882－1945)以及庞加莱分别独立地解决了一个变量的情形，使该问题的研究获得重要进展。

23.发展变分学方法的研究(有重大进展)

变分法最终寻求的是极值函数，使得泛函取得极大或极小值。经典的例子是降线问题，即在重力作用下一个粒子沿着该路径可以在最短时间内从点 A 到达不直接在它底下的一点 B。自从伯努利向欧洲数学家提出这个著名的问题开始，

变分法就成了数学家们研究的重要领域，在整个20世纪，变分法得到了极大发展。

当然，希尔伯特的23个问题也不是尽善尽美的。一些评论者认为，希尔伯特问题未能包括拓扑学、抽象代数和微分几何等，而这些在20世纪也成了数学的前沿和热点，这是希尔伯特没有预见到的。此外，希尔伯特问题除数学物理外，很少涉及应用数学。但这都不能掩盖希尔伯特的伟大功绩。

20世纪末，人们也想模仿19世纪末的希尔伯特，提出一批有价值的数学问题。但由于20世纪数学的发展使得数学的分支越来越细，发展的深度和广度都大大超过了当初的想象，已没有一个人能像当年的希尔伯特那样涉足数学的广泛领域。于是人们想到了组成一个数学家小组来做这件事，并且已经付诸行动，但最终并没有做成，这也从另一个角度见证了希尔伯特的伟大。

希尔伯特其人

经过整整一个世纪，希尔伯特的23个问题中有将近一半已经解决或基本解决；有些问题虽未解决，但也取得了重要进展；有的问题则离解决还差得很远。能够解决一个或基本解决一个希尔伯特问题的数学家，就自然地被公认为世界一流水平的数学家，由此可见希尔伯特问题的特殊地位。

希尔伯特问题的研究与解决大大推动了许多数学分支的发展，这些分支包括：数理逻辑、几何基础、李群、数学物理、概率论、数论、函数论、代数几何、常微分方程、偏微分方程、黎曼曲面论、变分法等。重要的“问题”历来是推动科学前进的杠杆。一位科学家如此集中地提出这样一整批问题，并且如此持久地影响了一门学科的发展，这在科学史上是绝无仅有的。我们有必要了解一下这位在数学史上举足轻重的数学家其人。

大卫·希尔伯特1862年生于柯尼斯堡，1943年卒于哥廷根。他的父亲奥托(Otto)是位法官，他母亲姓埃尔特曼(Erdtmann)，其他知之甚少。柯尼斯堡位于普鲁士偏僻的东部(即现在俄罗斯的加里宁格勒)，它强大的数学传统可追溯到雅可比。希尔伯特于1880年进入柯尼斯堡大学，结交了两位挚友，一位是赫尔曼·闵可夫斯基(Hermann Minkowski)，昔日的数学神童；一位是长他三岁的阿道夫·胡尔维茨(Adolf Hurwitz)，自1884年起就是柯尼斯堡大学的教授。每天下午5点钟，希尔伯特、闵可夫斯基、胡尔维茨便会相聚，他们边散步边广泛讨论数学奇思，希尔伯特似乎以这种方式接受了他的基本数学教育。这三人后来成为一生至交，或作为合作者进行课题研究，或潜在地影响彼此的工作。在以后的生活中，希尔伯特也以“数学散步”作为教育学生的重要手段。

希尔伯特解决戈登问题和建立有限基元定理所用的原理使不变量论由一个计算学科变成一个代数学科;他的《数论报告》决定了下一代代数数论工作者的研究方向;他关于几何基础的书主导了那个领域后来半个世纪的研究途径;在分析和数学物理方面,他引入的无限维希尔伯特空间占有重要一席;尽管试图将一切数学公理化的希尔伯特计划没有达到它的终极目标,但他在数学逻辑方面的工作使这一学科的许多分支得到深入发展。

希尔伯特最初的研究兴趣是不变量理论,这是在当时受到高度关注的一个代数课题。不变量的一个初等例子是二次型的判别式 b^2-4ac,拉格朗日 1773 年注意到它在二次型变换为其等价形式时保持不变。1888 年,希尔伯特在解决不变量理论的主要问题时,把所有复杂的计算抛在脑后而使用了纯粹的概念推理——希尔伯特定理,证明了所有二次以上的型的不变量都存在,而无需把它们一一计算出来! 这个结果出来后受到数学家戈丹(Paul Gordan)(在希尔伯特之前,戈丹是这个问题的权威)的质疑——“这不是数学,这是神学!”随着时间的推移,人们逐渐认识到,这种纯存在性证明比构造性证明更有价值、更本质。希尔伯特本人后来也在这种纯存在性证明思路的启发下,给出了一个构造性证明,完全消除了质疑。然后希尔伯特继续前行去征服其他领域。事实上,这成为他大部分数学生涯的工作模式:用几年时间彻底研究一个主题,使它发生倾覆性的变化,然后就去研究完全不同的主题。

希尔伯特研究不变量理论的成功,使他坐稳柯尼斯堡大学的职位。1892 年,他和凯特耶罗施(Kaethe Jerosch)结婚——她是位才女,在他的许多工作中起到了秘书和研究助理的作用。她为他 1897 年的巨作《数论报告》编制了参考书目,代数数论就是在该书中趋于成熟的:1893 年,希尔伯特受德国数学家联盟的委托撰写关于代数数论的报告,该报告最终成为一部长达 300 页的书,于 1897 年完成,它回溯到二次型和费马大定理并展望了类域论,后者是 20 世纪的重大研究课题。受克莱因赏识,希尔伯特被邀请到哥廷根大学任职。

完成《数论报告》后,希尔伯特转而研究几何基础,他再次获得好几项巨大成果——最终填补了欧几里得几何中的缺陷,发现了帕普斯和笛沙格定理的代数意义,但也留下了一些未了结的事。希尔伯特认识到,通过实数坐标建立欧几里得几何的模型并不能用来证明这种几何是相容的,人们还需要首先证明实数理论是相容的。希尔伯特发现,后者是否成立并不显然,因此把它列为他 1900 年在巴黎提出的 23 个数学问题中的第二个。之后他便丢下这个主题转而研究数学物理。

然而,一直没有人解决实数理论的相容性问题,到 20 世纪 20 年代,希尔伯特感到有必要重返这一主题,后来形成了很有名的希尔伯特纲领,纲领首先需要一

种数学的形式语言，使“证明”这个概念本身可依据精确的公式操作规则从数学上加以定义。纲领的这一方面是可行的，怀特海(A. N. Whitehead)和罗素(B. Russell)1910年的著作《数学原理》做的就是这件事。不过，难点在于去证明那些规则不会导致矛盾，希尔伯特纲领正是在这里卡了壳——哥德尔(K. Goedel)在1931年证明了“不会导致矛盾”这件事绝不可能实现。哥德尔著名的不完全性定理表明：不存在这样的相容性证明，而用新的公理来扩展形式语言的后果只能使相容性证明更难达到。希尔伯特是最早宣扬哥德尔成果的学者之一，也因此受到人们的尊敬。哥德尔定理第一个完全的证明1938年出现在希尔伯特和贝尔奈斯(Barnays)的书里。

希尔伯特在数学上既能通观全局，建立深刻的理论，又能解决许多重要的具体问题。此外，他对数学界的贡献还在于建立了哥廷根学派，同克莱因一起对哥廷根数学的辉煌起到了举足轻重的作用。

哥廷根是德国中部的一座大学城，1737年建立了哥廷根大学。1795年，18岁的高斯入学并终生在这里工作，高斯的到来改变了德国数学自18世纪初莱布尼茨逝世以来的清冷局面，并从此开创了哥廷根的数学传统。但高斯不善于交往和组织，未能把哥廷根经营为欧洲的数学中心。高斯去世后，狄利克莱和黎曼继承并推进了他的事业，哥廷根的影响扩大了，但却仍然未成为欧洲的数学中心。形势的改观发生在19世纪80年代，当时德意志民族的统一，把德国科学带入了一个普遍高涨的时期。1886年克莱因来到了哥廷根，他除了有很高的数学才能以外，还有很高的组织才能。他首先网罗人才，第一个选中的就是希尔伯特。1895年，希尔伯特被克莱因邀请到了哥廷根。之后，在他们两人的共同努力下，大批青年学者涌向哥廷根，哥廷根成为盛极一时的世界数学中心。1929年建成的哥廷根数学研究所，成为各国数学家的麦加。众多数学家在那里做出了杰出的工作，如闵可夫斯基为狭义相对论提供了数学框架——闵可夫斯基四维几何；外尔(H. Weyl)最早提出规范场理论，为广义相对论提供了基础；冯·诺依曼为刚刚诞生的量子力学提供了严格的数学基础，发展了泛函分析；女数学家诺特奠定了抽象代数的基础，也刺激了代数拓扑学的发展；库朗(R. Courant)在偏微分方程求解方面的工作为空气动力学等一系列实际课题扫清了道路；等等。那里的一批数学家被称为哥廷根学派，后期也称为希尔伯特学派。哥廷根这个盛极一时的世界数学中心，后来在法西斯浩劫中毁于一旦。1933年希特勒上台，疯狂打击犹太人。哥廷根数学学派中有不少犹太人，他们纷纷逃离德国，几乎所有希尔伯特学派的人都移民到了美国，如阿廷(E. Artin)、库朗(R. Courant)、德恩(M. Dehn)、勒威(H. Lewy)、弗理特里希(K. O. Friedrichs)、诺伊格鲍尔(O. Neugebauer)、冯

·诺依曼、诺特、外尔、波利亚等，在哥廷根只剩下了年老体衰的希尔伯特一人，1943年，他在悲愤中去世。而从哥廷根走出去的数学家，也以自己的方式传扬了哥廷根数学学派的精神，如1943年外尔在美国创建了"普林斯顿高等研究院"，以数学为主要研究方向，库朗则在纽约建立了"库朗应用数学研究所"，两者都继承了哥廷根数学的传统，保留了哥廷根数学学派的精神火种。

希尔伯特不仅是一位伟大的数学家，而且有很高尚的品德。令人尊敬的不只是他的数学成就，也包括他优秀的人品。

第一次世界大战时希尔伯特就拒绝在"宣言"上签字。1914年德国挑起第一次世界大战后，德国政府让一批著名的科学家和艺术家出来发表"宣言"——《告文明世界》，以应对世界舆论谴责，声明他们拥护德国皇帝威廉二世，声称"德国人发动了战争"的说法不符合事实。当时，德国政府邀请了一大批知名人士签字，数学家中邀请了世界声望最高的希尔伯特和克莱因两人签名。发表过"埃尔朗根纲领"、用不变量观点统一几何学的数学家克莱因没有什么怀疑就签了名。但希尔伯特仔细阅读后，却表示他不能判断"宣言"内容的真实性，从而拒绝了签字。这份1914年10月15日发表的"宣言"使文明世界震惊：那些素来受人尊敬的科学家们怎么会同意在这样一份欺骗文明世界的"宣言"上签字呢？所以希尔伯特拒绝签字，特别引人注目。在德国国内，似乎他是一个卖国贼，当1914年11月开学时，许多学生不再来听希尔伯特的课，但是希尔伯特却赢得了世人的尊重。

希尔伯特为法国数学家达布写过悼念文章。"达布上和"和"达布下和"在定积分理论中为人所熟知。1917年达布逝世时，法国与德国正在交战，所以德国人不敢悼念他。但希尔伯特对达布非常敬佩，写了一篇悼念文章。文章发表后，一群学生到希尔伯特家门前示威，要他收回和销毁这篇悼念"敌人数学家"的文章。希尔伯特断然拒绝这一无理要求，并且到校长那里据此提出辞职。结果希尔伯特很快收到了校方的道歉信，悼念达布的文章也继续刊登。希尔伯特一生只写过四篇悼念文章，除这篇外，其余三篇分别是悼念魏尔斯特拉斯、闵可夫斯基和胡尔维茨的。

希尔伯特支持女数学家诺特(Emmy Noether，1882—1935)。当时的德国封建传统仍旧浓厚，对女科学家和资历较浅的学者有较深的歧视，诺特1916年从埃尔朗根来到哥廷根就遭遇这样的歧视。但希尔伯特和克莱因看出她的才能，很是重视她。他们要为诺特争取一个讲师的职位，却遭到大学评议会的反对。希尔伯特在会上说：如果我们这里是大学而不是澡堂，那么性别就不该成为她升任讲师的反对理由。希尔伯特以自己的名义申请了一门课，让诺特来讲授。诺特很快显示出她的才能，后来在代数方面有巨大的贡献，做了许多奠基性的工作，成为世界

著名的数学家。

如果 20 世纪数学家中有人可以说这个世纪是他的时代的话,那这个人非希尔伯特莫属。对于数学科学,他是孜孜不倦的研究者,擅长目标明确地直攻重大的具体问题,从中寻找带普遍意义的理论与方法,并开辟新的研究方向。他以这样的方式从一个问题转向另一个问题,从而跨越和影响了现代数学的广阔领域。对于朋友和学生来说,他是品格高尚的伙伴、温和宽容的长者和极富魅力的教师;而对于数学未来的发展来说,他又是一位深刻的思想者与引路人,他提出的未来数学的 23 个问题延伸出很多数学分支学科,当他去世时,《自然》杂志评论道:20 世纪数学家中,几乎没有谁的工作不是从这些问题中拓展出来的。

数学问题

希尔伯特在他的演讲开始时指出:"每一个时代都有自己的问题。问题有了答案,并不代表事情就完结了。好问题应该引出更进一步的问题,这也就是数学发展的动力。"希尔伯特关于"数学问题"的演讲并非一蹴而就,而是经过长达八个月的思考,根据 19 世纪数学研究的成果和发展趋势,抓住当年数学研究领域中最活跃、最关键、最具影响的课题,从中精选出 23 个尚未解决的问题,并预测这些问题将在新世纪的数学发展中起到重要作用。正如希尔伯特所期盼的那样,这些问题广泛激励了整个 20 世纪的数学研究,可见好的问题对学科进展具有重要的意义。一门学科充满问题,它就充满生命力;而如果缺乏问题,则预示着该学科的衰落。正是通过解决问题,人们才能够发现学科的新方法、新观点和新方向,达到该学科更为广阔和高级的境界。

什么是"好的问题"? 希尔伯特在他的关于"数学问题"的演讲中举了三个"好的问题"的例子,这三个问题既有从客观世界的现象中提出的,也有纯粹从数学本身提出的。

第一个例子是约翰·伯努利提出的"最速降线问题",即求出两点之间的一条曲线,使质点在重力作用下由一点至另一点降落最快的问题,这个问题推动了一个数学新分支——变分法的诞生。

第二个例子是"费马问题",即不定方程 $x^n+y^n=z^n$(x,y,z 是整数)在 n 大于 2 时没有整数解的证明。这一问题看上去非常特殊,似乎并不重要,但它却大大推动了代数数论的发展。代数数论中的核心概念"理想数"正是为了解决"费马问题"提出来的,并且相关的发展深入到代数及函数论领域中,意义重大。

第三个例子是庞加莱提出的"三体问题",即已知三个球形物体的质量及初始运动参数,求三个物体的运动规律的问题。它来源于天体力学,却催生了常微分

方程定性理论，并推动了内容丰富的动力系统理论的发展。

从中，希尔伯特归纳了“好的问题”的标准：

首先，要清晰易懂。问题本身应很容易解释清楚，让别人理解。希尔伯特说：一个清晰易懂的问题会引起人们的兴趣，而复杂的问题使人们望而生畏。

其次，有一定难度且能够解决。为了具有吸引力，一个数学问题应该是困难的，但又不应该完全不可解决，使我们劳而无功。

最后，对学科发展有重大推动意义。“好的问题”的解决，其效果和意义不是局限于问题本身，而是涉及整个学科，推动整个学科的发展。

提出“好的问题”的动力既来自数学以外的客观世界，即实践及其他学科和工程技术的需要这种来自外部的动力，也来自数学内部的逻辑发展，即来自数学内部的巨大动力。数学工作者常常通过对数学内部提出的问题的研究，发展和完善数学理论，这些理论又通过不同途径应用于实践。能够提出“好的问题”是不容易的，只有对该学科的知识有广泛而深入了解的学者，对该学科的发展有清醒认识和深刻洞察的学者，才有可能提出“好的问题”。希尔伯特提出的 23 个问题使得数学及相关学科从解决这些问题中获得巨大收益。

二、集合论与数学基础的统一——希尔伯特旅馆和理发师悖论

希尔伯特旅馆

风景秀丽的旅游小镇每天都吸引着许多前来观光的游客，镇上有家旅馆生意格外红火，它因为有无穷多间客房而被誉为世界上最大的旅馆(图 3-2)。



图 3-2 希尔伯特旅馆

有一天旅馆住满了客人，门厅摆上了“客满”的招牌。可是又有一位旅客慕名而来，恳求留宿一晚。老板对服务生说：让已经住下的旅客都调换一下房间，1 号房间的客人住到 2 号去，2 号房间的客人住到 3 号去，依次类推，这样就空出了 1 号房间。于是，这位客人高高兴兴地住了进去(图 3-3)。

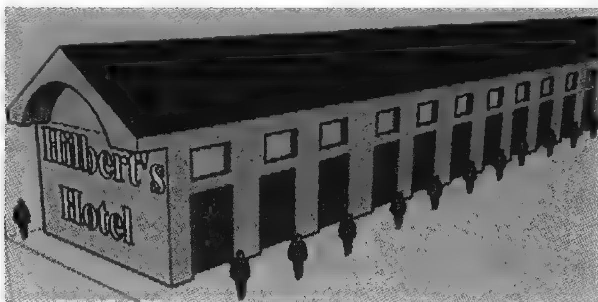


图 3-3 客满后再空出 1 个房间

第二天来了一个庞大的旅游团要求住宿，旅客人数与自然数一样多。老板对服务生说：你让 1 号房间的客人搬到 2 号去住，2 号房间的客人搬到 4 号，3 号的搬到 6 号，依次类推，k 号房间的客人搬到 $2k$ 号去住，这样 1 号、3 号、5 号、7 号……房间都空出来，让他们住进去就行了……

为了让大家形象地理解“无穷集合”这个概念，著名的德国数学家希尔伯特(David Hilbert，1862—1943)在一次演讲中首次描述了这个无穷大旅馆。希尔伯特本人最初的描述不可考，但这个故事广为流传，清晰地展现出了无限与有限的差异，让听众对无穷大的性质具有了更感性直观的理解。有数学家曾评价这个故事“在某种程度上讲出了无穷大的全部故事”。当旅馆的房间数为有限个时，客满的情况下自然无法再入住新的客人。但当旅馆有无穷个房间时，“客满”与“无法入住新的客人”两者并不等价，原因就在于无穷集合的性质与有限集合的性质有根本的差别。

尽管在数学想象上这种旅馆(或任何无限的事物)是可能的，但在现实中这样的事物似乎永远不可能真实地存在。这个故事违反了人们的直觉认识，现在称之为“希尔伯特旅馆悖论”。

两千多年的困惑

无穷(或无限)，来自于拉丁文的“infinitas”，即“没有边界”的意思(图 3-4)。在关于“无穷”的探究过程中，神学、哲学、数学是紧密地交织在一起的。这个概念对人类的直觉而言充满了怪异和矛盾，两千多年来一直困扰着人们。

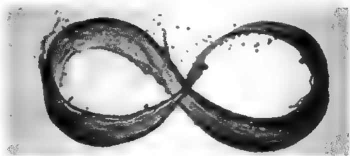


图 3-4　形象化的无穷符号

关于无限的两种对立观点：实在无限和潜在无限

所谓实在无限思想是指：把无限的整体本身作为一个现成的单位，是已经构造完成了的东西。所谓潜在无限思想是指：把无限看作永远在延伸着的、不断产生出来的东西，它永远在构造之中，永远完成不了，是潜在的过程而不是实在的存在。数学中对无限的研究史实际上是这两种思想合理性的历史。

本书前面曾讲过，古希腊数学中已反复涉及到无穷的概念。毕达哥拉斯学派提出“万物皆数”，认为数是宇宙“无限”中的“有限”；爱利亚学派的芝诺提出的“芝诺悖论”，是对无限可分性问题相当深刻的讨论。

芝诺悖论

芝诺(Zeno,约公元前490—前430),古希腊哲学家,以提出诸多悖论而闻名。其中有

两分法悖论:运动不存在,因为位移事物在达到目的地之前必先抵达至一半处;在抵达一半处之前又必先抵达四分之一处……依次类推可至无穷。

飞箭悖论:飞着的箭是静止的,因为任何事物当它在一个和自己大小相同的空间里时,它是静止的,而飞箭在飞行过程中的每一"瞬间"都是如此。

两分法悖论是针对事物无限可分的观点,飞箭悖论则是针对不可分无限小量的思想,深刻揭示了理解无限性和连续性所遭遇的困难。无独有偶,我国战国时期(公元前475—前221)的《庄子》一书中也记载了多条名辩,其中有"一尺之捶,日取其半,万世不竭"和"镞矢之疾,而有不行不止之时",与芝诺悖论有异曲同工之妙。

毕达哥拉斯学派成员希帕苏斯发现了不可公度量(无理数),这对学派及其追随者来说是不能接受的。一方面无理数不能表示成两个整数之比;另一方面无理数用十进制表示的话是无限不循环小数。这动摇了"万物皆数"的宗教基础,从而导致了数学史上第一次数学危机。最终欧多克斯的方案化解了这次危机,但他的解决办法是区分了"数"和"量",认为"数"是离散的、间断的,"量"是连续的、完全的,对数的无穷实在性不予讨论,从此希腊数学重心转向几何研究。

阿基米德巧妙运用了潜在无限和无穷小量的思想,把研究的图形细分成小矩形,然后将小矩形的面积和作为该图形面积的近似值,求出了弓形面积、球体和锥体的体积。

亚里士多德首先把存在分为两类:一种是潜在的存在,一种是实在的存在。他认为"量"在实在上不是无穷的,但分起来却是无穷的;因此只有潜在的无穷,没有实在的无穷。几千年来,亚里士多德的哲学构成西方和基督教教义关于宇宙本质的基础。按照亚里士多德的观点,人们普遍接受的观念是:实在的无穷不可能存在,如果存在的话,那么唯一的实在无穷是神性(因为上帝是无穷大并且是不能被认识的)。因此在漫长的中世纪里,一方面数学中回避讨论无穷,另一方面无穷成为上帝的专有属性。

亚里士多德对数学的影响

亚里士多德将无限区分为实无限和潜无限，且只承认潜无限。他还对“定义”进行了深入讨论，指出数学中需要未加定义的名词。他研究了作为数学推理的出发点的基本原理，并将它们区分为公理和公设，“公理”是放之四海皆准的原理，是一切科学公有的真理；而“公设”是数学这门科学内部使用的原理。

亚里士多德还对数学推理规律进行了规范化和系统化，创立了逻辑学。其中的基本逻辑原理“矛盾律”（一个命题不能同时是真的又是假的）和“排中律”（一个命题或是真的，或是假的，二者必居其一）成为数学中间接证明的核心。亚里士多德的形式逻辑被奉为演绎推理的圣经，直接为欧几里得《几何原本》的演绎几何体系奠定了方法论的基础。



图 3-5 ［意］拉斐尔(1483—1520)的画作《雅典学派》

在欧洲文艺复兴时期，描绘现实世界成为绘画的主要目标。如何将三维世界描绘到二维的画布上呢？画家们发明了透视法，在绘画中使用了无穷远点（画作的中心作为一个正在消失的点，朝向它的风景逐步消失在无穷远处），如图 3-5 所示，朝向画面中心的直线段延长后将交汇在无穷远点。

17 世纪，伽利略对无穷的特征做出了重大发现。欧几里得《几何原本》的第一公理是：整体大于部分。伽利略最先察觉到这个公理并不普遍成立——一个集合跟它自己的真子集可以有相同的大小。1629 年伽利略出版《关于两大世界体系的对话》，宣扬日心说取得巨大成功，1633 年他被罗马宗教法庭严刑拷打并判处终身监禁于佛罗伦萨的住宅中。在漫长的监禁日子里，伽利略完成了一篇论文《两种新科学的对话》(1638)，讨论了各种不同的哲学和数学观点。他建立了正整数和正整数的平方之间的一一对应：一方面，正整数集合里包含了所有的平方数，前者显然比后者大；可另一方面，每个正整数平方之后都唯一地对应了一个平方数，两个集合大小应该相等才对。伽利略发现了无穷集合的一个重要性质：无穷集合可以与它的一个真子集有“同样多的元素”。这使伽利略感到震惊，可惜他没有沿着这个思路更进一步思考下去，他认为无穷不能够比较大小。

17世纪下半叶到18世纪,数学进入了繁荣发展的分析时代。无穷从两个领域进入了数学。一个领域是微积分——为了计算几何图形的切线、长度和面积,引入了“无穷小量”;另一个领域是无穷级数,这是个无穷大的过程。这两个领域又紧密联系着:无穷级数是微积分中非常有效的工具,函数的无穷级数展开在微积分的发展和应用中起到了核心作用。

我们都听说过关于高斯(C. F. Gauss,1777—1855)的一则动人故事:老师出了一道题“1+2+3+…+100=?”,高斯采用交换与结合的办法,很快得出了答案。但是,高斯的方法对于无穷多个数求和就行不通了。例如:

$$1-1+1-1+1-1+\cdots=?$$

如果从首项开始将两项结合起来,有:

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots=0+0+0+\cdots=0$$

如果从第二项起每两项结合起来,有:

$$1-(1-1)-(1-1)-\cdots=1-0-0-\cdots=1$$

这不就得出矛盾了么?

数学史上发生了奇特景象:一方面,微积分以及飞速拓展的分析学科作为强有力的工具,在数学和力学上取得了巨大的成功;另一方面,作为演算基础的“无穷小量”的解释含混不清,包含明显的逻辑矛盾,无穷级数运算规则也没有明确界定,漏洞百出。这在当时的数学界引起了一定的混乱,导致数学史上第二次数学危机的爆发。直到19世纪,柯西(Cauchy,1789—1857)、魏尔斯特拉斯(Weierstrass,1815—1897)等人建立了完善的极限、连续、微分、积分等概念,给出了严格的$\varepsilon-\delta$定义,第二次数学危机才宣告圆满解决。

高斯曾在一封信中说“我必须最强烈地反对把无穷作为一种完成的东西来使用……无穷只不过是一种谈话方式,它是指一种极限……”。同时代的大数学家柯西也不承认无穷集合的存在,他认为部分同整体构成一一对应是自相矛盾的事。

当时的数学家们大都不赞成实在无限的观点,也不同意在无穷集之间使用一一对应,因为这将出现部分等于整体的矛盾——与《几何原本》第一公理相矛盾。这种情形一直持续到19世纪末,直到康托尔做出开创性工作之后情况才有所转变,而此时潜无穷观已统治数学2 000多年了。

康托尔

康托尔(G. Cantor,1845—1918)出生于俄国圣彼得堡。他的父亲生于丹麦,年轻时移居圣彼得堡,成为一名成功的商人。他的母亲出生于音乐世家。康托尔的父母在家中讲德语,他在圣彼得堡也入了德语学校。康托尔从小接受了良好的

教育，不仅广泛学习了各门学科知识，还培养了文学、艺术、音乐等方面的兴趣。他十分爱好艺术，曾在中学时组建过自己的弦乐四重奏组合；刚到苏黎世大学的时候艺术才能也大有增长，1862 年创作的素描《树下之犬》堪称业余爱好者的上乘之作，如图 3-6 所示。



图 3-6 树下之犬

1856 年康托尔的父亲得了肺结核，不得不找一个气候和环境更适合居住的地方，他们举家迁往德国法兰克福。1859 年春，康托尔进入一所中学学习。1860 年 9 月，康托尔进入达姆什塔特高等职业学校学习，按规定前两年是一般基础课程。他对数学非常着迷且成绩突出，职业学校的知识远不能满足他的需求，他再次向父亲请求献身数学，并最终得到了父亲的允许。参加职业学校的结业考试之后，康托尔于 1862 年秋选择了瑞士苏黎世大学作为其数学事业的开端。第二年初由于父亲病重，康托尔中断了学业回到家中照顾父亲。6 月份父亲去世，康托尔全家迁往柏林。柏林作为当时普鲁士王国的首都，是政治、科学、文化的中心，柏林大学是德国所有大学中的佼佼者，对于数学尤其如此。从 1863 年秋到 1867 年秋，除了按照当时的习惯 1866 年在哥廷根大学读一个学期之外，康托尔一直在柏林大学学习。

在柏林大学期间，康托尔得到了向世界顶级数学家学习的机会，他选修了魏尔斯特拉斯、库默尔、克罗内克的一系列课程。他的主要兴趣是数论，还自学了高斯的《算数研究》以及勒让德的《数论》。

1867 年秋，康托尔完成了博士论文《论二次不定方程》，讨论了 $ax^2+by^2+cz^2=0$ 的整数解（其中 a,b,c 均为整数）。这个题目是数论中的经典问题勾股定理的推广，康托尔弥补了大数学家拉格朗日、勒让德、高斯留下的空白，给了这个问题一个完整的答案。他的导师库默尔，以及第二导师魏尔斯特拉斯，都对康托尔的工作给予了高度评价。1867 年底康托尔通过答辩，获得博士学位。

在当时的德国，通往大学教授之路是非常不容易的。取得博士学位之后，要想取得大学授课资格，需要提交一篇论文同时还要做一次试讲，通过以后才可以成为讲师。但是讲师没有薪水，只能够通过收取学生的听课费来维持自己的生计。经过几年的讲师经历，如果成绩突出才有可能升任副教授与教授。但是各种职称席位的数目是由文化部设定的，只要席位没有空缺，要想提拔根本不可能。

康托尔博士毕业后先是在柏林一所女子学校任教一年。1869 年春，康托尔到哈勒大学任教，在此工作一生直至去世。当时的哈勒大学有两个数学教授席位、一个副教授席位，另外有若干无薪讲师席位。占据两个数学教授席位的是天

文学家罗森贝尔格(当时数学席位把天文学也包括在内)和数学家海涅,副教授则由施瓦茨担任。1869 年,施瓦茨离开哈勒大学去瑞士苏黎世理工大学任教授,他建议康托尔到哈勒大学去。康托尔先是担任无薪讲师,1872 年升任副教授。1877 年德高望重的罗森贝尔格申请退休并支持 32 岁的康托尔接替自己的职位,1879 年 4 月文化部正式批准任命康托尔为哈勒大学正教授。此后康托尔一直在哈勒大学占据这个职位直至去世。

1. **研究傅里叶定理**

康托尔到哈勒大学后,研究领域从数论转向分析,这得从傅里叶级数说起。法国数学家傅里叶(J. Fourier,1768—1830)在研究热传导问题时,创造性地将热量传导同正弦波联系起来。当时工业上提出了冷却问题,科学家试图算出热量是如何传递的,从而推算出某部位的温度变化情况。傅里叶首先把问题简化,他想象沿着一个均匀的长杆在间隔相等的地方加热,他把杆上集中加热的地方画成正弦波形的波峰,而把加热点之间较冷的区域画成波谷。由于热量由加热点传播到较冷的区域,波峰就会下降而波谷就会升高。傅里叶发现,只要把所有的加热点的正弦波加在一起,就能描绘出杆在加热之后任何时刻的热量分布。这样傅里叶认识到,任何周期震动,不管多么复杂,都可以分解为一系列的简谐振动的叠加,换句话说,它在数学上可以表示为三角函数项构成的级数,如图 3-7 所示。

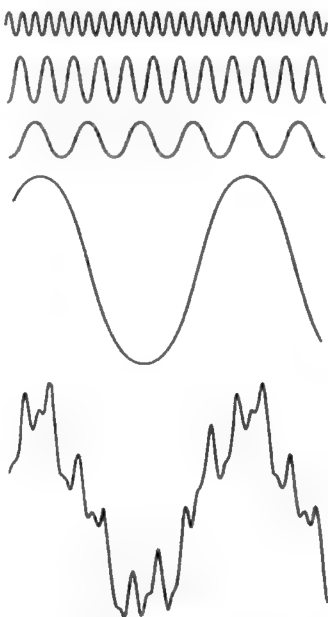


图 3-7　最下面的函数是上面四个函数的和

傅里叶定理:任何周期为 2π 的函数都可以表示为正弦函数和余弦函数的无穷级数和,即

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

这里 a_n,b_n 是与 x 无关的系数,对任何函数 $f(x)$,傅里叶通过积分形式给出所有系数 a_n,b_n 的表达式,具有这种特殊系数的级数称为傅里叶级数。

傅里叶从实际问题出发得到的这个公式又触犯了无穷的戒律:

①由于是无穷多项,涉及到无穷级数求和问题。

②由于系数是由积分求出的,涉及到积分概念的问题,即无穷小量求和问题。

③$f(x)$除了傅里叶级数表示外,是否还可能有其他的三角级数表示?即三

角级数表示的唯一性问题。

狄利克雷 1837 年首次给出了 $f(x)$的傅里叶级数收敛于自身的充分条件，解决了第一个问题。他的学生黎曼(Riemann，1826—1866)给出了“积分”的严格定义，解决了第二个问题。海涅着手解决第三个问题，他在 1870 年的论文中指出：如果连续函数的傅里叶级数一致收敛，则函数能够唯一地表示为三角级数；如果不连续点只有有限个，唯一性定理也成立。但是海涅的一致收敛条件太强了，不太实用，他希望康托尔能够改进这个结果。

康托尔很快在两个方面取得了突破：一是把一致收敛条件放宽，只要函数 $f(x)$存在对每个 x 值都收敛的三角级数，那么这个三角级数的表示就是唯一的。第二个突破是，康托尔把海涅的允许有限多个例外点的情况推广到无穷多个点。

康托尔在研究无穷多个点的情况过程中转了方向，从热衷的数论转向分析。他思考了离散集和连续域之间的深刻差别，并由此开始向实数理论、点集理论进军，一步一步地建立起无穷集合理论。

2. **建立实数理论**

由于前人没有研究过无穷点集的情况，康托尔得一切从头开始。在有限区域内，最简单的无穷点列是趋向于某一个值的无穷数列，这个数列有一个极限点，在极限点的每一个邻域内都包含这个点列中的无穷多个点，如图 3-8 所示。

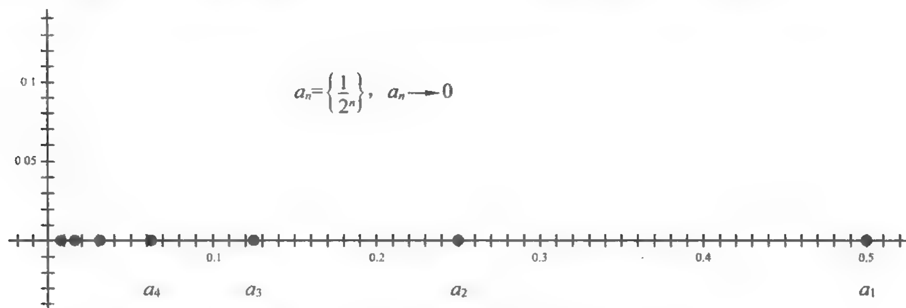


图 3-8　例如数列 $a_n=\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$，其极限点为 0

在关于傅里叶级数唯一性问题的研究中，对于有无穷多个例外点但其极限点只有有限多个的情形，康托尔证明唯一性定理成立。再要向前推进，他还得先分析实数的集合。

自从第一次数学危机以来，数和量一直区别对待，这种区别越来越使数学研究出现困难。一方面，解析几何把坐标轴上的点与数对应，只能考虑有理数，而有理数之间是有缝隙的，直线的连续性无法理解。另一方面，无理数理论本身缺乏逻辑依据，甚至连$\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}$都没有合理的证明。

在这样的双重背景下，要想搞清楚有无穷多个极限点的情形，康托尔先得把实数搞清楚。1872 年康托尔发表了实数理论的论文。他从有理数的无穷序列出发来定义无理数以及它们之间的顺序关系、四则运算，证明了实数系是完备的(实数系中的数构成的无穷序列的极限仍在实数系之中)，建立起一套令人满意的实数理论。建立实数系之后，直线上每一点都有对应的实数了。然后他在这篇文章中提出“康托尔公理”——对于每一个实数直线上都有一相应的点，确定了实数集合与直线上的点集合之间的一一对应性质。这样康托尔为下一步研究线性点集奠定了可靠的基础。

1872 年，戴德金、海涅、梅雷(H. C. R. Meray)等人也几乎同时出版了他们关于无理数研究的著作。他们出发点不同，方法也各异。其中戴德金和康托尔的实数构造方法正是我们现在通常所采用的。戴德金的分割法更为直观一些，多见于数学分析教材。

3. 集合论的诞生

1873 年 11 月 29 日康托尔在写给好友戴德金的信中，明确提出了导致集合论产生的问题：

取所有正整数 n 的集体，表示为(n)，然后考虑所有实数的集体，表示为(x)；简单说来，问题就是(n)和(x)是否能够对应起来，使得一个集体中的每一个个体只对应另一个集体中的一个且唯一一个个体？

这个问题康托尔已经考虑了很久，特别是在考虑连续性的本质时，他总是要碰到这个根本问题。他已经知道正整数集合同正有理数集合可以建立一一对应，但是同实数集合对应的问题无法解决。戴德金回信表示这个问题无法马上回答。康托尔一方面对这个问题百思不得其解，另一方面对这个问题本身的价值也充满怀疑。他在 12 月 2 日给戴德金的信中说道“要是你认为它不值得再花费力气，那我就会完全赞成”。

1873 年 12 月 7 日，这一天被数学界公认为集合论的诞生日，康托尔写信给戴德金，说他已经成功地证明：实数的集体是不可数的，也就是不能够同正整数集体一一对应起来。

康托尔这一步的主要成就在于，他在混沌一片的无穷中画出了一条界线，把无穷区分为可数和不可数两类，成为研究无穷的出发点。康托尔第一次把可数无穷的概念明确地引入数学，并且给出了判定的方法：凡是能够和自然数建立一一对应的都是可数无穷。

可数的无穷

由于自然数 0,1,2,3…… 中任一个数之后的数总能被说出,所以虽然自然数有无穷多个,但却能被一个一个地数出来。因此,我们说自然数是“可数的”无穷大。

康托尔规定,一个集合的“基数”是对该集合所包含元素个数的一个度量;凡是能够建立一一对应的就说它们具有相同的“基数”,即从集合大小来说认为它们有相同的数量级。例如,所有偶数也是一个可数无穷大,虽然直觉上人们可能会认为偶数只有自然数的一半那么多。此外,在直观感觉上,有理数似乎比自然数要多得多,因为有理数是稠密的(任何两个有理数之间都存在另一个有理数),但康托尔建立了正整数同正有理数之间的一一对应,所以全体有理数也是可数无穷的。康托尔给可数无穷的“基数”引入一个符号 $\aleph_0$,读作:阿列夫零。



图 3-9　阿列夫

康托尔没有沿用原有的 ∞ 符号,因为在数学上它通常表示一种潜无限过程。康托尔的关于无穷的研究工作最先受到当时神学家们的热情追捧,而数学家们大都持怀疑和反对态度。康托尔选择希伯来字母表中的第一个字母 $\aleph$(图 3-9),应该与其宗教信仰有些许联系。康托尔曾告诉他的朋友们,他为选择用阿列夫符号来标记超穷数而感到骄傲,从超穷数中他看到了数学的新起点——实无穷的开始。

	1	2	3	4	5	6	7	8	…
1	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	…
2	$\frac{2}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{8}$	…
3	$\frac{3}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{8}$	…
4	$\frac{4}{1}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{4}{8}$	…
5	$\frac{5}{1}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{5}{8}$	…
6	$\frac{6}{1}$	$\frac{6}{2}$	$\frac{6}{3}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{6}{6}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{6}{8}$	…
7	$\frac{7}{1}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{7}{7}$	$\frac{7}{8}$	…
8	$\frac{8}{1}$	$\frac{8}{2}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{8}{4}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{8}{6}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{8}{8}$	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

图 3-10　正有理数可数性证明图示

如图 3-10 所示，对正有理数的可数性，康托尔 1895 年给出了第二种证明方法。显然每个正有理数都会在这个阵列中出现，如果按照箭头所示依次排序，略去已经出现过的数，就得到全体正有理数的一个无穷序列。在这个序列中，每一个有理数都可以被自然数编号，因此这个无穷序列是可数的，记为$\{r_1, r_2, r_3, \cdots\}$。我们可以据此排列出全体有理数的集合$\{0, -r_1, r_1, -r_2, r_2, -r_3, r_3, \cdots\}$，因此全体有理数也是可数的。

康托尔 1873 年证明实数不可数采用的方法比较繁冗复杂(证明的发表也颇具戏剧性，后面专门详谈)，远不如他于 1890 年发表的第二种证明方法即“康托尔对角线法”简洁明快。康托尔对角线法证明的思路是：假定$(0,1]$是可数集，那么其中的所有实数必然可以按自然数编号排成一个序列，现将每个实数表示为无限小数形式并一行一行排列整齐(约定有理数也写成无限小数，如 $0.5=0.49\,999\,999\,999\cdots$)，可以根据对角线上的数值构造出一个与任何一行不同的实数，而这个实数却属于$(0,1]$，这就与假定矛盾。

如图 3-11 所示，假设由 m, w 任意无穷排列构成的集合是可数的，则我们可以根据对角线的字母完全构造出一个与之处处相反的排列。显然这个新的排列不等于任何 E_n，这与假设矛盾，因此由 m, w 任意无穷排列构成的集合是不可数的。

$$
\begin{array}{lcccccccccccccl}
E_0 & = & m & m & m & m & m & m & m & m & m & m & m & m & \cdots \\
E_1 & = & w & w & w & w & w & w & w & w & w & w & w & w & \cdots \\
E_2 & = & m & w & m & w & m & w & m & w & m & w & m & w & \cdots \\
E_3 & = & w & m & w & m & w & m & w & m & w & m & m & w & \cdots \\
E_4 & = & w & m & m & w & w & m & m & w & m & w & m & w & \cdots \\
E_5 & = & m & w & m & w & w & m & w & m & w & m & w & m & \cdots \\
E_6 & = & m & w & m & w & w & m & w & w & m & w & m & w & \cdots \\
E_7 & = & w & m & m & w & m & w & m & w & m & w & m & w & \cdots \\
E_8 & = & m & m & w & m & w & m & w & m & w & m & w & m & \cdots \\
E_9 & = & w & m & w & m & m & w & w & m & w & w & m & w & \cdots \\
E_{10} & = & w & w & m & w & m & w & m & w & m & m & w & m & \cdots \\
E_{11} & = & m & w & m & w & w & m & w & m & m & w & m & m & \cdots \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\
E_n & \neq & w & m & w & w & m & w & m & m & m & m & m & w & \cdots
\end{array}
$$

图 3-11　“康托尔对角线法”示意图

康托尔证明了实数的不可数性，显示出存在着不同等级的无穷大。有自然数那样的可数的无穷大，也有刻画直线上所有实数的另一类不可数的无穷大。康托

尔之后的一系列研究工作不仅创立了集合论这门学科，给数学带来了新的机遇和挑战，同时也给他自己带来了无穷的烦恼。在做更进一步的开创工作之前，康托尔决定先发表关于实数不可数性的重要发现。

4.《论所有实代数数集体的一个性质》的发表

要想完整了解康托尔的一生，不得不介绍一下克罗内克(Kronecker，1823—1891)。克罗内克 1845 年在柏林大学取得博士学位，随后他经商，在取得成功之后，1853 年又回到数学研究当中。1861 年由于出色的工作他当选为柏林科学院院士，在学术界影响巨大。

克罗内克在柏林大学所讲授的都是当时的最新成果：代数方程论、数论、行列式论与积分理论。克罗内克在学术观点方面属于保守派，认为“上帝创造了整数，其他一切都是人造的”。他甚至走到极端，凡是同整数无关的研究，例如对$\sqrt{2}$和 π 的研究，都一概不承认。

康托尔在柏林大学求学期间，主要兴趣在数论上，写的 5 篇论文都是关于数论的。由于康托尔老老实实搞数论，克罗内克十分高兴，在康托尔学业上帮助有加，这与其后来对待康托尔的态度可谓是判若两人。

1873 年底康托尔证明了实数的不可数性。过了新年，康托尔决定发表这一发现，他认真地写出了自己的证明，采用的方法是反证法，比较繁冗复杂，不过论文题目却变成了《论所有实代数数集体的一个性质》。这是戴德金给他出的主意。戴德金之所以如此建议，一是因为克罗内克的主要研究对象是代数数，可以迎合他的兴趣；二是和当时数学家们研究的领域的距离大大缩小，不至于引起太大的非议。

代数数与超越数

若数 ξ 满足一个有理系数代数方程 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$，则 ξ 叫作一个代数数。不是代数数的数叫作超越数。

代数数所包含的范围很广，它包括了所有的有理数和它们的根。例如$\sqrt{2}$是代数数，因为它满足整系数多项式方程 $x^2-2=0$。高斯、库默尔、戴德金、克罗内克都在代数数论方面做出了贡献。

1761 年德国数学家兰伯特(J. G. Lambert，1728—1777) 证明 π 是无理数。1794 年，法国数学家勒让德(A. M. Legendre，1752—1833)在巴黎出版了《初等几何》一书，对兰伯特的不严格证明予以补证，从而给出 π 为无理数的严格证明。此外，勒让德还在书中写道：“很有可能，数

π不能包含在代数的无理数中，亦即它不能是系数全部为有理数的有限项的代数方程的根。”他的这一猜测最终导致数学家们将无理数区分为代数数和超越数。超越数不仅很难找到刻画它们的性质，而且难以表示及构造。许多有着明确表示的数，例如e，π，证明它们是无理数都比较困难，更别说证明它们是超越数了。

一直到50年后，关于超越数的研究才有所突破。1844年法国数学家刘维尔宣布超越数存在，并实际构造出一批超越数，用形如

$$\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^{2!}}+\frac{a_3}{10^{3!}}+\cdots(a_i\in\{0,1,2,\cdots,9\},i=1,2,3,\cdots)$$

的无穷级数表示。1873年法国数学家埃尔米特证明了e是超越数。但他们都没有说清楚到底超越数有多少，这距离系统的超越数理论甚远，时至今日仍是零星结果的汇集，与漂亮的代数数理论有天壤之别。

康托尔原来的问题是：

{实数的集体}={有理数的集体}+{无理数的集体}

康托尔已经证明全体实数是不可数的，他还证明了有理数是可数的，由此立刻可以推出无理数是不可数的。

康托尔把这一思想稍微改动了一下：

{实数的集体}={实代数数的集体}+{实超越数的集体}

这样就不那么显然了，因为实代数数的集体不仅包含全部有理数，还包含大量的无理数。加进来这么多无理数之后，实代数数的集体还能是可数的么？康托尔巧妙地用自然数把所有实代数数进行编号，证明了所有实代数数是可数的。由于所有实数是不可数的，这样自然就推出全体实超越数是不可数的。

1874年康托尔的这篇关于无穷分类的革命性文章在《克雷尔杂志》发表了，在数学界引起了不小的震动。康托尔的证明是史无前例的，他连一个具体的超越数都没有构造出来，就说超越数不仅存在，而且比实代数数还要多得多，这怎么能不引起当时数学家的怀疑甚至是愤怒呢！

康托尔刚到哈勒大学时并没打算久留，一直梦想着到著名的柏林大学工作，但是这个梦想后来被克罗内克打破了。从康托尔发表无理数理论开始，克罗内克就指责康托尔是“年轻的堕落者”。随着康托尔不断揭示无穷的本质，他和克罗内克的战争变得更加激烈和个人化。

康托尔在整理《论所有实代数数集体的一个性质》的同时又开始琢磨新的问

题。既然区分了可数与不可数两种无穷，还有没有更大的无穷呢？先前都是讨论直线上的点集，自然而然康托尔要猜测，平面上所有点的集合是否是那更大的无穷？

1874 年 1 月他在给戴德金的信中提出："能否在包含端点的线段和包含边界的正方形之间建立一一对应？"这种猜测看起来很荒谬，因为站在解析几何的立场来看，两个独立变量怎么可能归结为一个独立变量呢！康托尔自己也认为"答案似乎显然是否定的，看来几乎没必要去证明了"。但经过三年的探索，康托尔于 1877 年 6 月给戴德金写信，告诉朋友自己证明了更广泛的情况：任意 n 维空间与直线是可以建立一一对应的。这个结论与直觉如此相悖，以致于康托尔惊呼："我看着它，但我不相信它！"

康托尔把这个结果整理为《对流形学说的一个贡献》送到《克雷尔杂志》，这也遭到了克罗内克的激烈反对，半年之后（1878 年春）才最终被发表。康托尔的这篇文章又激起了轩然大波，引起众多数学家关于几何空间维数本质的大讨论，推动了拓扑学的发展。但是因对这种耽搁和延误不满，康托尔以后再也不在《克雷尔杂志》发文章了。

5. **系统的集合论研究**

康托尔是个热切盼望攀登绝顶的数学家，他的一系列研究从根本上背离了数学中关于无穷的解释与使用的传统，从而引起了激烈的争论乃至严厉的谴责。但他不顾众多数学家、哲学家甚至神学家的反对，坚定地创造和捍卫超穷集合论，在开拓的这个领域里越走越远。

1879—1885 年间，《数学年刊》相继发表了康托尔 6 篇系列文章《论无穷线性点流形》（Ⅰ至Ⅵ）。其中前四篇直接建立了集合论的一些重要结果，包括对线性点集分类以及在分析上的应用；后两篇建立了超穷数的理论。康托尔于 1895 年、1897 年在《数学年刊》发表了《对超穷集合论基础的贡献》（Ⅰ、Ⅱ），宣告了超穷集合论的完成。

从研究傅里叶级数的收敛开始，康托尔逐步建立了无穷点集理论。他定义了一系列点集论的基本概念，如极限点、导集、闭包、稠密集、完备集等，并给出了大量定理和例子。

康托尔建立了初等集合论，给出了集合、元素、子集、相等、等价、基数等定义，规定了集合的并、交、笛卡尔积等运算。在此基础上，他定义了基数的加、乘、幂等运算。此外，他还定义了一种特别重要的集合——幂集（给定集合 S，由 S 的一切子集构成的新集合，称为 S 的幂集）。

既然有不同层次、不同种类的无穷，那么就应该用某种符号来表示这些量。康托尔认为，建立集合论重要的是把数的概念从有穷数（例如自然数序列中的数1，2，3等任何一个都是有穷的）推广到无穷数。为此，他建立了超穷基数和超穷序数理论。

康托尔早在1874年就猜测：在可数集基数（记为$\aleph_0$）和实数集基数（记为C）之间，没有别的基数了。也就是说在自然数集这个可数无穷和实数集这个不可数无穷之间，没有别的数量级的无穷了。这就是著名的"连续统假设"，如图3-12所示。虽然康托尔多次宣布证明了这个猜测，但实际上他始终没能够解决这个问题。后来希尔伯特把它列为他所提出的23个著名问题的首个问题。

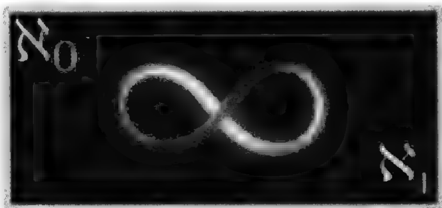


图3-12 连续统假设示意图

研究中遇到的重重困难（特别是连续统假设以及后来的集合论悖论）、学界的持续怀疑和攻击、家庭的挫折错综复杂地交织在一起，使康托尔患上了抑郁症。从1884年5月起，康托尔的健康状况时好时坏，成了哈勒大学精神病院的常客。

6. 把全部数学建立在集合论的基础之上

康托尔关于集合论的系列论文《论无穷线性点流形》发表之后，尽管没有得到老一辈数学家的支持，却在年轻人当中找到了知音。1883—1884年间，十几篇数学论文都应用和发展了集合论。德国数学家胡尔维茨（A. Hurwitz，1859—1919）率先把集合论应用到函数论上，随后庞加莱应用集合论来讨论克莱因群。

从微积分严格化方面来说，极限理论、实数理论使得微积分建立在严格的逻辑基础之上，而实数理论又可在无穷集合论的基础上发展起来。这样一来，整个微积分理论的基础归结到了集合论上，看来将数学绝对严格化的目标快要达到了。

1897年在瑞士苏黎世召开了第一届国际数学家大会。胡尔维茨作了大会报告，报告的内容是关于解析函数论的新进展，他明确阐述了康托尔集合论对函数论的进展所起的巨大推动作用。法国数学家阿达玛在分组会上也报告了康托尔理论对他工作的直接影响。还有不少人也直接讨论了集合论。总的来说，在这次盛会上，集合论在数学中的地位得以确立，康托尔的工作得到公开承认和热情称赞。随后集合论开始在意大利、英国、美国、俄国以及其他欧洲国家得到传播。康托尔的集合论不再是可有可无的哲学，而是真正对数学发展起重要作用的理论工具。

在世纪之交的转折关头，康托尔的集合论从数学家们不屑一顾的旁门左道，登堂入室而成为数学中心的中心、基础的基础了。通过康托尔的工作，数学家们找到了营造数学大厦的基石。1900 年在巴黎召开的第二届国际数学家大会上，著名数学家庞加莱郑重宣布："现在我们可以说，数学最终的严格性基础已经确立了。"

整个数学界都陶醉于"一切数学成果都可建立在集合论上"这一美妙图景之中。他们乐观地认为从算术公理系统出发，借助集合论的概念，便可以建造起整个数学的大厦。可惜好景不长，集合论有漏洞的消息便迅速传遍了数学界。

理发师悖论

实际上，康托尔在研究过程中最先发现了悖论，但没有像 1903 年罗素发表的悖论那样引起轰动、造成深刻的危机。康托尔早在 1883 年就提到不能谈"所有集合的集合"之类的话，否则会导致矛盾，后来他又多次重申这一点。1895 年他发现大序数悖论之后，在 1899 年他又发现大基数悖论。康托尔认为悖论容易解决——只要你不说"所有"，他在 1899 年给戴德金的信中也表达了这个观点。

大序数悖论和大基数悖论

大序数悖论：设 W 为一切序数所组成的集合。因为 W 按照自然大小顺序可形成一个良序集，所以 W 有一个序数 Ω，Ω 应比 W 中任一序数都大，但由定义，Ω 也应该出现在 W 中。于是有 $\Omega>\Omega$，矛盾。

大基数悖论：取 S 是一切集合的集合。根据康托尔定理，S 的幂集的基数大于 S 的基数。但 S 是一切集合的集合，它的基数不可能小于其他集合的基数。

康托尔发现的这两个悖论由于牵涉到集合论中较为复杂的概念，人们认为可能是在其中某些环节处不小心引入的一些错误所致，对于消除悖论都持有乐观态度。所以这两个悖论在当时没有引起太大的注意。

引起巨大反响的是 1903 年公诸于世的"罗素悖论"。1901 年 5 月，英国数学家、哲学家罗素(Bertrand Russell，1872—1970)碰到了问题。康托尔曾经提到过最大的基数不存在，罗素却认为世界上所有对象的数目应该是最大的，这样他就发现其中一定有些矛盾。罗素悖论用集合论的语言阐述如下：

将所有集合分为两类，第Ⅰ类集合中的任一个都是它自己的一个元素(例如所有集合所构成的集合)，第Ⅱ类集合中的任何一个都不是它自己的一个元素(例

如由五个人所构成的集合)。考察第Ⅱ类集合的全体组成的集合,它不可能为第Ⅰ类,因为它所有的元素都不属于它们自己,所以只能是第Ⅱ类;若为第Ⅱ类,即它不属于它自己,而第Ⅱ类的特征是它的元素都不属于它们自己,于是它又只能落入属于自己的类,即属于第Ⅰ类。如此陷入死循环。

1918年罗素用通俗的说法把它变成大家都能听懂的"理发师悖论"(图3-13):

色威尔镇的一个理发师规定要给该镇所有不给自己刮胡子的人刮胡子。问题是:这位理发师该给自己刮胡子么?如果他给自己刮胡子,那么违反了给所有不给自己刮胡子的人刮胡子的规定,所以他不能给自己刮胡子;如果他不给自己刮胡子,按规定他又应该给自己刮胡子。

罗素悖论相当简明,所涉及的知识是集合论中最基本的方面,这就大大动摇了集合论的基础。由于当时集合论概念已经渗透到众多数学分支,并且实际上已经成了数学的基础,所以悖论的发现引起人们对数学整个基本结构有效性的怀疑。罗素悖论在数学界与逻辑界引起了极大震动。追求绝对严密和天衣无缝的数学,又一次陷入了自相矛盾与巨大裂缝的危机之中。数学家们震惊之余甚至有些惊慌失措,这就导致了数学史上的第三次数学危机。


图3-13 理发师悖论

罗素悖论的出现是由康托尔的集合论中对于集合的定义不加限制导致的。由于当时集合论已成为数学理论的基础,所以这一悖论的出现引发了众多的数学家对这一问题的补救。

1908年,德国数学家策梅洛提出并建立了第一个集合论公理系统,通过引入适当的公理对集合做出恰当的限制,使之不能太大,从而避免"所有基数"、"所有序数"、"所有集合"等说法,这就消除了罗素悖论产生的条件。策梅洛的公理系统后来又经过进一步完善,最终得到了更为严谨的ZF公理系统。ZF公理系统既保留了康托尔集合论中有价值的成果,又成功排除了当时发现的所有集合论悖论。第三次数学危机比较圆满地解决了。此后集合论发展到公理化集合论阶段,1908年以前由康托尔创立的集合论被称为朴素集合论。

三、数学到底是什么——哲学的论战

作为一个现代人，不知道“数学”的人恐怕不多，但能将数学是什么解释得很清楚的人恐怕也不是很多。数学是什么？这个问题当属哲学上“我是谁”的根本问题。即使作为专业的数学工作者，由于各自的认识与经历不同，对于数学的认识也可谓“一千个人眼中，就有一千个哈姆雷特”。自数学产生以来，人们对数学本质的探讨绵延不绝，对数学的认识随着不同的历史发展时期而有所不同。

现在人们对数学的定位有三点认识：数学不仅是一种重要的“工具”或“方法”，也是一种思维模式，即“数学方式的理性思维”；数学不仅是一门科学，也是一种文化，即“数学文化”；数学不仅是一些知识，也是一种素质，即“数学素质”。

数学的定义

《中国大百科全书·数学卷》中对“数学”的定义沿用了恩格斯对于数学的概括：数学是研究现实世界中数量关系和空间形式的科学，即研究数和形的科学。这一理解是目前普遍接受的。还有其他的理解，例如，钱学森在《关于思维科学》一书中，把数学和哲学并列，认为数学是在社会科学和自然科学之上的一门学问，可以说是一门形而上的学问。随着现代数学的发展，人们认为数学远远超出“数”和“形”的范围，应当包括结构、范畴、模型、空间等更广的对象。不过，这些对象大都可以视作数和形的广义延伸。

随着时间的推移，数学有了很大的发展，诸如事物结构、数理逻辑等，都成为数学的研究对象，这些似乎已不能被包含在上述定义中。因此，人们开始寻找数学的新“定义”。但是，要给数学下个定义，并不那么容易。转了一圈后，又回到恩格斯当年的定义上来，只不过对“数量关系”和“空间形式”赋予了更广泛的含义。最简单最朴素的话中常常包含着深刻的本质。

美国数学家柯朗(Richard Courant，1888—1972)在《数学是什么》中说：“数学，作为人类智慧的一种表达形式，反映生动活泼的意念、深入细致的思考，以及完美和谐的愿望，它的基础是逻辑和直觉、分析和推理、共性和个性。”

法国数学家博雷尔(E. Borel，1871—1956)说，数学是我们确切知道我们在说

什么，并肯定我们说的是否对的唯一的一门科学。

英国数学家罗素说，数学是所有形如“p 蕴含 q”的命题的类，而最前面的命题 p 是否对，却无法判断。因此数学是我们永远不知道我们在说什么，也不知道我们说的是否对的一门学科。

有趣的是，博雷尔与罗素的说法完全相反，但它们却从不同的侧面反映了数学的本质。现代人从不同的角度考察、理解数学：

①哲学说：数学是一种哲学，说法源于古希腊，代表人物有亚里士多德、欧几里得等人。亚里士多德曾说：新的思想家把数学和哲学看作是相同的。确实，古希腊的许多数学家同时也是哲学家。比如“无限”和“连续”的概念，既是数学研究对象，也是哲学研究对象。牛顿在《自然哲学之数学原理》序言中说，这本书是“作为哲学的数学原理的著作”，“在哲学范围内尽量把数学问题呈现出来”。迪莫林(B. Demollins)说：没有数学，我们无法看透哲学的深度；没有哲学，人们也无法看透数学的深度；而若没有两者，人们就什么也看不透。还有人这样总结二者关系：哲学从一门学科中退出，意味着这门学科的建立；而数学进入一门学科，就意味着这门学科的成熟。②符号说：数学是一种高级语言，是符号的世界。③科学说：数学是精密的科学，数学是科学的皇后。④工具说：数学是其他所有知识工具的源泉。⑤逻辑说：数学推理依靠逻辑，数学为其证明所具有的逻辑性而骄傲。⑥创新说：数学是一种创新，如发现无理数，提出微积分，创立非欧几何。⑦直觉说：数学的基础是人的直觉，数学主要是由那些直觉能力强的人们推进的。⑧集合说：数学各个分支的内容都可以用集合论的语言表述。⑨结构说(关系说)：强调数学语言、符号的结构及联系，数学是一种关系学。⑩模型说：数学就是研究各种形式的模型，如微积分是物体运动的模型，概率论是偶然与必然现象的模型，欧氏几何是现实空间的模型，非欧几何是非欧空间的模型。⑪活动说：数学是人类最重要的活动之一。⑫精神说：数学不仅是一种技巧，更是一种精神，特别是理性的精神。⑬审美说：数学家无论是选择题材还是判断能否成功，标准主要是美学的原则。⑭艺术说：数学是一门艺术。⑮万物皆数说：数学研究数的规律，一切都可以归结为整数与整数比。

数学的特点

对于数学的特点，比较普遍的说法有抽象性、精确性、累积性和应用的广泛性。

1. 抽象性

抽象性是所有各门学科都具有的性质，没有抽象就没有科学。那么，为什么

专门把“抽象性”说成是数学的特点呢？数学的抽象到底与其他学科的抽象有什么不同呢？

第一，数学的研究对象本身就是抽象的。

从学科研究对象的角度，数学不同于物理学、化学、生物学等学科。物理学、化学、生物学等学科，都有具体的物质和具体的物质运动形态作为自己的研究对象。例如，物理学中的力学、电学、光学、声学、热学等，都有具体的物质和具体的物质运动形态作为自己的研究对象。化学、生物学等学科也是如此。

而数学呢？如果问数学的研究对象是哪种物质和哪种物质运动形态，应该怎样回答？其实，并没有哪种具体的物质和哪种具体的物质运动形态作为数学的研究对象，数学的研究对象是从众多的物质和物质运动形态中抽象出来的事物，是人脑的产物，如数学中研究的圆，是人脑的产物。

所以，有些著名科学家认为，数学从本质上不同于物理学、化学、生物学等自然科学，可以说，数学不是自然科学，数学具有超越具体科学和普遍适用的特征，具有公共基础的地位。

第二，数学抽象的重点在于事物的数量关系和空间形式。

与其他学科的抽象不同，数学的抽象舍弃了事物的其他一切方面，只保留事物的数量关系和空间形式。当然，这里的数量关系和空间形式，用的都是其广义的解释。

现代数学的发展越来越广泛、细致，但无论哪个数学分支，都仍然是在研究事物的数量关系和空间形式。数学的丰富性，由此得到很好的体现；数学的统一性，也由此得到很好的体现。

第三，数学的抽象程度大大超过了其他学科。

许多人一提到数学，首先的感觉就是抽象，这表明数学的抽象程度是很高的。

人类从 3 个苹果、4 条狗、5 个人等，抽象出 3，4，5 的概念，历经了不知多少万年的漫长时间，当然是了不起的抽象。但是，数学的抽象程度远远不是这个例子所能说明的。数学的抽象是一层一层逐步提高的，到越高的层次，抽象的程度也越高。例如，数学家从人类生存的现实空间，抽象出三维欧氏空间，又进一步抽象出 n 维线性空间以至无穷维线性空间，以及其他更加抽象的空间。

第四，核心数学主要处理抽象概念以及概念之间的抽象联系。

数学与其他学科一样，来源于实践，但是数学学科一旦形成，就具有相对的稳定性。数学学科的发展动力，不仅来源于数学以外的实践，也来源于数学的内部。特别是基础数学（或称核心数学），数学的内部提出的问题，往往成为其发展的主要动力。

数学学科的研究对象是抽象的概念，经数学的演绎为真的论断称为定理，定

理表述的是抽象概念之间的抽象联系。

其他学科的学者证明自己的论断常常依靠观测和实验，但数学家证明定理只依靠抽象的推理和计算。也就是说，数学的抽象不是局部的特点，而是全局的特点，不仅数学的概念是抽象的，数学的方法、数学的论断也都是抽象的。

2. **精确性**

数学的精确性，表现在数学推理的严格和数学结论的确定两个方面。数学研究是依靠逻辑推理展开的，而逻辑推理的严格性是大家公认的。所以，只要数学推理的前提是正确的，推理的过程又没有错误，那么，得到的数学结论一定是确定无疑的。并不是说其他学科缺乏精确性，而是说，数学的这种精确性，是与其他学科不同的，是其他学科难以企及的。

关于"晶体的结构有多少种"的讨论，就很说明问题。这一研究曾经进行了很多年，许多物理学家、化学家、晶体学家给出了各不相同的结论。数学家介入以后，运用"群"的理论，得到了明确的答案：晶体的结构只能有 240 种。而且，数学家的推理是如此精确，让人信服，使得之后就不再有人去研究这一问题了，因为结论已经确定无疑。

3. **累积性**

数学学科具有悠久的历史，与自然科学相比，数学是一门历史性或累积性很强的学科。重大的数学理论总是在继承和发展原有理论的基础上建立起来，它们不仅不会推翻原有的理论，而且总是包容原先的理论。例如，古代文明中形成的十进位值制记数法和四则运算法则，我们今天仍在使用；哥德巴赫猜想等历史上的难题，长期以来一直是现代数论领域中的研究热点。

德国数学家汉克尔(Hermann Hankel，1839—1873)说：在大多数学科里，一代人要推倒另一代人所修筑的东西，只有数学，每一代人都能在旧建筑上增添一层新楼。这意味着，数学以外的学科的创新，多半是推倒旧理论，建立新理论，唯有数学学科的创新，是在承认原有结论的基础上，发展出新结论、新理论。例如宇宙论，从托勒密(Claudius Ptolemy，约公元 90—公元 180)的地心说发展到哥白尼的日心说，再发展到开普勒(Johannes Kepler，1571—1630)的行星运动三定律，每一次都不是局部的改革，也不是在原来基础上的改进，而是根本性的革命。数学学科的发展，则不同于上例情形。数学定理只要证明无误，就总是正确的。后人对数学的发展，只能是在原有基础上的发展，而不会是推倒重来。

4. **应用的广泛性**

数学的高度抽象性，带来了应用的极其广泛性。事物越抽象，其外延就越广泛。我国数学家华罗庚(1910—1985)曾说：宇宙之大，粒子之微，火箭之速，化工

之巧,地球之变,生物之谜,日用之繁,数学无处不在。其实现在看来,数学应用的广泛性,不但涉及自然科学各个领域,也涉及社会科学各个领域。

客观世界中涉及数量关系或空间形式的问题随处可见,对它们的研究都要用到数学。缺少数学就只能定性地描述客观事物,而不能定量描述客观事物,从而不能准确地刻画客观事物及其变化,因而就减少了科学预见的可靠性,或减弱了科学预见的精确度。

历史上数学应用的精彩例子有:哈雷彗星、海王星和电磁波的发现。

古时候,人们认为彗星的出现是不祥之兆,并且直到17世纪,大多数科学家认为彗星的轨道是抛物线,光顾太阳系后将一去不复返。但英国天文学家哈雷(Edmond Halley,1656—1742)着手计算彗星轨道,发现1682年、1607年和1531年出现的彗星有类似的轨道。他判断这三颗彗星其实是同一颗彗星,彗星的轨道很可能不是抛物线而是很扁的椭圆。这样,彗星就会返回太阳系。哈雷预言上述彗星将在1758年底或1759年初再次出现。1759年,这颗彗星果然出现了。虽然哈雷已在此前的1742年逝世,但为了纪念他,这颗彗星被命名为"哈雷彗星"。哈雷彗星的回归周期为76年,最近一次的回归是1986年,下一次回归约在2062年。

海王星是太阳系最远的大行星,它是1846年在数学计算的基础上被发现的。天文学家分析了天王星运动的不规律性,推断出这是由于其他行星的作用引起的。勒威耶计算出它应处的位置,观察员在指定时间、指定位置发现了该行星。这通常被看作牛顿力学和微积分应用的巨大成就。

电磁波在现代的生产、生活中无处不在,是人们熟知的词汇,但很少有人知道电磁波的发现本质上依赖数学。英国物理学家麦克斯韦(James Clerk Maxwell,1831—1879)1864年概括了从实验中总结的电磁现象规律,用数学方程组的形式表述出来,由此推导出可能存在现在称为"电磁波"的物质,并且它应该以光速传播。据此,他提出了光的电磁理论,把光、电、磁三者统一起来。24年后,德国物理学家赫兹(Heinrich Rudolf Hertz,1857—1894)用实验证实了电磁波的存在。不久,意大利的马可尼和俄国人波波夫又在此基础上各自独立地发明了无线电报。从此,电磁波走进了千家万户。

此外,如果没有数学的广泛应用,我们将无法享受下列现代文明成果:密码编制和破译、CT扫描技术、战争模拟技术、喷气式飞机和航天器的控制技术、印刷革命、数字电视等。

美国数学史家M.克莱因曾经说过:"一个时代的总的特征在很大程度上与这个时代的数学活动密切相关。这种关系在我们这个时代尤为明显。"正是由于古希腊强调严密推理,追求理想与美的数学高度发达,才使得古希腊具有优美的文

学、极端理想化的哲学、理想化的建筑与雕刻，才使得古希腊社会具有现代社会的一切胚胎；也正是由于数学创造力的缺乏，才使得罗马民族缺乏独创精神，罗马文化只是外来文化。数学和来源于人类理性的真正激情第一次被希腊人激发了。希腊人最大限度地决定着今天文明本质的贡献是他们的数学。英国著名历史学家汤因比(Arnold J. Toynbee，1889—1975)指出："世界上存在过 21 种文明，但只有希腊文明转变成了今天的工业文明，之所以如此，就是因为数学在希腊文明中提供了工业文明的要素。""言必称希腊"是历史的必然。

数学不仅是一种方法、一门艺术或一种语言，数学更主要是一门有着丰富内容的知识体系，其内容对自然科学家、社会科学家、哲学家、逻辑学家和艺术家十分有用，同时影响着政治家和神学家的学说。数学已经广泛地影响了人类的生活和思想，是形成现代文化的主要力量。

数学的发展

数学，作为人类思维的表达形式，反映了人们积极进取的意志、缜密周详的推理以及对完美境界的追求。它的基本要素是：逻辑和直观，分析和构作，一般性和特殊性。虽然不同的传统可以强调不同的侧面，然而正是这些互相对立的力量的相互作用以及将它们综合起来的努力才构成了数学学科的生命、用途和它的崇高价值。一切数学的发展都或多或少是基于实际的，但是理论一旦在实际需要中产生，就不可避免地赋予自身发展的动力，并超越直接实用的局限。

数学本身是一个历史的概念，人们对数学本质特征的认识是随着数学的发展而不断变化、深化的。我们应当以发展的眼光，从数学的来源、存在方式、抽象水平及数学研究的结果等方面来分析数学的本质特征。

有记载的数学起源于公元前两千多年前，古巴比伦人搜集了极其丰富的资料，这些资料今天看来应属于初等代数的范围。至于数学作为现代意义上的一门科学，则是迟至公元前 5—前 4 世纪才在古希腊出现的。东方和古希腊之间的接触不断增多(始于波斯帝国时期，至亚历山大远征时期达到高峰)，使古希腊人得以熟悉古巴比伦人在数学和天文学方面的成就，数学很快就被加入到风行于古希腊城邦的哲学讨论之中。古希腊的思想家逐渐意识到，在连续、运动、无限大这些概念中，以及在用已知单位去度量任意一个量的问题中，数学都存在着固有的极大困难。面对这个挑战，经过了一番不屈不挠的努力，产生了欧多克斯(Eudoxus)的几何连续统理论，这个成果是唯一能和两千多年后的现代无理数理论相媲美的古代理论。数学中这种公理演绎的趋向起源于欧多克斯时代，又在欧几里得的《几何原本》中得以成熟。从一些清清楚楚的定义和没有矛盾的"明显"公理出发，进行准确的逻辑推理，这种古希腊数学的公理化倾向成为数学两千年来的传统。

公元前6世纪前，数学是关于“数”的研究。这一时期在古代埃及、古代巴比伦、古代印度与古代中国等地区发展起来的数学，主要内容是计数、初等算术与算法，几何学则可以看作应用算术。

从公元前6世纪开始，古希腊数学兴起，突出了对“形”的研究，数学成为关于数与形的研究。从那时起直到17世纪，数学的研究对象没有本质的变化。

公元前4世纪的希腊哲学家亚里士多德将数学定义为“数学是量的科学”，其中“量”的涵义是模糊的，显然不能单纯理解为“数量”。

在这一历史时期，由于数学源于分配物品、计算时间、丈量土地和测量容积等实践，因而数学对象与客观实在是非常接近的，人们能够很容易地找到数学概念的现实模型，这样，人们自然地认为数学是一种经验科学。

在17世纪，像笛卡尔这样的数学家与哲学家对数学的看法有了微妙的变化，笛卡尔认为：“凡是以研究顺序和度量为目的的科学都与数学有关。”

在笛卡尔的时代，数学发生了重大的转折。在17和18世纪，数学家关注的焦点是运动与变化。牛顿与莱布尼茨创立的微积分本质上是运动与变化的科学，它使科学家们能够从数学上研究行星运动、机械运动、流体运动、动植物生长等。因此，在牛顿和莱布尼茨以后，数学成为研究数、形以及运动与变化的学问。

运动与变化的数学描述仍然离不开数与形，因此在19世纪恩格斯还是这样来论述数学的本质：“纯数学的对象是现实世界的空间形式与数量关系。”然而就在恩格斯时代，数学又开始发生本质的变化。19世纪的数学家对数学本身的兴趣空前地增长。也就是说，除了现实世界的材料，他们更多地关注数学内部的发展需要。像抽象代数、非欧几何以及严格化的分析都是这类内部需要的产物。因此，从19世纪特别是后期开始，数学成为研究数与形、运动与变化以及数学自身的学问。

这种以数学自身为研究对象的倾向，也就是现代意义下纯数学的倾向，促使人们对数学的本质进行新的思考。在19世纪晚期，集合论的创始人康托尔曾经提出：“数学是绝对自由发展的学科，它只服从明显的思维。就是说它的概念必须摆脱自相矛盾，并且必须通过定义而确定地、有次序地与先前已经建立和存在的概念相联系。”

随着非欧几何、抽象代数和集合论等的产生，现代数学向抽象、多元、高维发展，人们的注意力集中在这些抽象对象上，数学与现实之间的距离越来越远，而且数学证明在数学研究中占据了重要地位，以致出现了认为数学是人类思维的自由创造物，是研究量的关系的学科，是研究抽象结构的理论，是关于模式的学问的观点。这些认识，既反映了人们对数学理解的深化，也是人们从不同侧面对数学认知的结果。

20世纪50年代，前苏联一批有影响的数学家试图修正前面提到的恩格斯的定义以概括现代数学发展的特征："现代数学就是研究各种量之间的可能的、一般说是变化着的关系和相互联系的科学。"这一定义不再区分"数"与"形"，可以说，又回到了亚里士多德对数学的最早定义中所使用过的"量"，但这个量却被赋予了丰富的现代涵义：它不仅包括现实世界的各种空间形式与数量关系，而且包括一切可能的空间形式与数量关系。

从20世纪80年代开始，又出现了对数学的定义作符合时代的修正的新尝试，一批美国学者将数学定义为关于"模式"的科学："这个领域已被称作模式的科学，其目的是揭示人们从自然界和数学本身的抽象世界中所观察到的结构和对称性。"

这一定义实际上是用"模式"代替了"量"，而所谓的"模式"有着极广泛的内涵，包括了数的模式、形的模式、运动与变化的模式、推理与通信的模式、行为的模式……这些模式可以是现实的，也可以是想象的；可以是定量的，也可以是定性的。数学的这一新定义，以其高度的概括性日益引起关注并获得大多数数学家的认同与接受。

从数学发展的源泉或数学发展的动力来看，我们也能清楚地认识数学的本质特征。数学既可以来自现实世界的直接抽象，也可以来自人类思维的能动创造。也就是说，数学兼有经验科学和演绎科学两种特性。

数学的经验性是从应用的角度来认知数学的结果，即把数学理论作为一种解决实践中提出的数学问题的工具，工具在时间中可以不断改进，甚至发明新的工具。数学家们在解决数学问题时，遵循"现实（生产、生活和社会中的）问题——建立数学模型——求解模型——验证模型的解"这样的思路进行。当社会还不发达，这样的现实问题还不多时，解决问题的工具也就不需要太多，因而，数学在其早期发展是非常缓慢的。这在古代中国的数学发展中表现得尤其充分，一部《九章算术》影响了一千多年。随着社会的进步、科学技术的发展，现实问题越来越多、越来越复杂，对解决这些问题的工具的要求也越来越高，提出了大量新的数学概念、规则和理论问题，从而催生了许多新的数学分支和数学理论。

数学研究的主要对象转向数学内部后，就不再依赖于具体的现实，而是从理论上进行抽象的演绎推导。数学主要研究对象和方法的转变，促进了数学的发展，产生了新的数学概念和数学理论。这些数学理论有些可以很快地用于解决实际问题，有些则未必。

可见，对数学本质特征的认识是变化的，要用历史的、发展的观点来看待数学的本质特征。

四、概率统计与随机世界



随机现象普遍存在于自然界和现实生活中。对于孤立的不确定性事件，在发生前我们无法预测结果；而当大量同类事件重复出现时，又会呈现出一定的规律性。为了更准确地研究随机现象的规律，产生了随机数学这一新的数学分支。

概率论是研究随机现象数量规律的一门学科，主要思想是把事件发生的可能性用概率来度量。数理统计学以概率论为理论基础，根据实验或观察得到的数据来研究随机现象，对研究对象的客观规律作出种种合理的估计和判断。

概率论和数理统计是随机数学两个独立的分支，被广泛应用于自然科学、经济学、医学、金融保险甚至人文科学中。由于二者之间有密切联系，"概率论与数理统计"通常并作一门作为大学数学的主要课程之一。

历史溯源

随机现象是相对于确定现象而言的。例如，当我们观察桌面上的一枚硬币时，可以准确地判断出是它的正面还是反面朝上，这是确定的；但当我们抛掷这枚硬币时，落到桌面上却可能出现正面朝上或者反面朝上两种结果，体现了事件的偶然性。哲学家们很早就讨论过事件的必然性和偶然性，但始终把偶然事件归结于不可感知，是由上帝做出的决定。直到 17 世纪，通过对偶然事件进行数学处理，才有了概率的概念。

1. 赌博的数学——概率论

概率论作为随机数学的一个分支，发展到今天已经渗透到自然科学、国民经济等众多领域，与我们的日常生活息息相关。古典概率的概念起源于保险业，从 14 世纪开始，随着海上贸易的兴起，荷兰、意大利相继出现了海运保险公司。这些公司通过计算各种风险发生的几率，把海运的保费核定为货物价值的 12%～15%。保险业的兴起推动了海上贸易的发展，也引起人们对概率精算的重视，而真正把数学演绎推理引入概率计算的，却是人类古老的赌博游戏。

1654 年，嗜赌的法国贵族梅雷(A. G. C. de Mere，1623—1685)曾向帕斯卡提

出“分赌注”问题，这就是数学史上著名的“点数问题”。在一次赌博中，梅雷和对方约定，两人各出 30 枚金币作为赌注，通过掷骰子决定胜负，先胜三局赢得全部赌注。在梅雷赢得两局，对方赢得一局时，法国国王突然召见梅雷，赌博不得不中断。赌局没结束，对如何分配赌注两人产生了分歧。梅雷认为，如果再掷一局，即使输了也是平局，这时他已经拥有 30 枚金币，再下一局中，有 50%获胜的几率，因此，他至少应该分得 45 枚金币，对方得 15 枚。而对方认为，既然获胜的几率是梅雷的一半，那么他也该拿到梅雷所得的一半，即 20 枚金币。两人争执不下，梅雷只好请教帕斯卡。帕斯卡把赌徒之间的争论当成了一个有趣的数学问题，开始与费马通信进行讨论，最后用排列组合的方法找到了正确答案。

梅雷已经赢过两次，只要再赢一次，或者对方连赢两次，都可以成为胜方。为确保能分出胜负不能有平局出现，最多需要再掷 2 次，会出现 4 种情况(用 A 表示梅雷获胜局，用 B 表示对方获胜局)：AA，AB，BA，BB。其中，前三种情况都是梅雷获胜，两人获胜几率之比为 3∶1，赌本按获胜几率分配，梅雷应得 45 枚金币。算法虽然不同，但结果与梅雷的分配方案一致。帕斯卡后来还给出了问题的通解：令 m 表示梅雷若获胜所需再赢得的局数，n 表示对方获胜所需再赢得的局数，则两人获胜概率之比为：$(C_{m+n-1}^{0}+C_{m+n-1}^{1}+\cdots+C_{m+n-1}^{n-1}):(C_{m+n-1}^{0}+C_{m+n-1}^{1}+\cdots+C_{m+n-1}^{m})$。

帕斯卡和费马把对一系列赌博问题的研究，推广到对一个随机事件概率的计算，给出了概率的古典定义，即：如果在相同的条件 S 下，存在 n 个互不相容且等可能的情形，有 m 个是有利于事件 A 的，那么事件 A 的概率就定义为$\frac{m}{n}$。帕斯卡和费马的研究引起了荷兰数学家惠更斯(C. Huygens，1629—1695)的兴趣，他于 1657 年发表短文《论赌博中的计算》，通过定义、公设、命题形成一套体系，这是第一篇关于概率论的科学论文。帕斯卡、费马和惠更斯被公认为概率论的创始者。

概率论的发展是从讨论赌博问题开始的，反过来，赌场也会用概率理论来设下陷阱，使它成为博彩业赢利的强有力工具。举个例子，很多经营老虎机的赌场都会设下巨奖，同时公示，已经有海量人群玩过游戏，而巨奖尚未兑现，暗示当你玩该游戏时会机会大增。殊不知，概率论里有一个重要的规律就是随机事件的独立性，当每个新人开始游戏时，与其他人是否获奖没有关系，所以他的获奖概率没有变化，但仍有大量人依旧乐此不疲地为赌场做着贡献。

在概率论早期，绝大多数问题与赌博有关。以赌博为模型来讨论概率论问题，可以方便地证明概率的计算结果，同时也为概率论提供了直观的形式与固定的术语。时至今日，作为概率的最初表示，我们还常常提到掷骰子。有关事件概率估计的问题，很早就出现在人类生活的各个领域，当解决这些问题的需求变得

更加迫切的时候,概率论就出现了。

2. 伯努利家族的贡献

伯努利家族是瑞士的著名数学世家,一个家族三代人中出现八位数学家,其中雅各布·伯努利(Jakob Bernoulli,1654—1705,图 3-14)和约翰·伯努利(Johan Bernoulli,1667—1748)兄弟以及丹尼尔·伯努利(Daniel Bernoulli,1700—1782)最为著名。



图 3-14　雅各布·伯努利

雅各布·伯努利和约翰·伯努利都是莱布尼茨忠实的学生与朋友,他们的工作构成了初等微积分的大部分内容。在曲线研究方面,雅各布·伯努利重点研究了悬链线,确定了等势曲线的方程。1713 年发表的雅各布·伯努利遗著《猜度术》,首次提出了后来以"伯努利定理"著称的极限定理,真正使概率论成为一门独立的数学分支。

约翰·伯努利的成就在于对微积分的卓越贡献和数学教育,他培养了包括欧拉在内的众多欧洲数学家。雅各布和约翰后来因悬链线问题产生激烈争论,虽然这种争论无疑推动了对曲线的研究,但也深深伤害了兄弟之间的感情,甚至波及到双方家庭,以致于在雅各布去世之后,他的《猜度术》手稿被他的遗孀和儿子隐匿多年,直到 8 年之后才得以出版,差点使这部概率论经典著作被湮没。

丹尼尔·伯努利是约翰·伯努利的儿子,作为一位数学家、物理学家、医学家,他的工作涉及到当时几乎所有数学和物理学的前沿问题。他最出色的工作是将微积分、微分方程应用到物理学中研究流体问题、物体振动和摆动问题,被推崇为数学物理方法的奠基人。丹尼尔在概率论的应用方面有重要的影响。当牛痘在欧洲大规模接种以后,曾因副作用引起争议,丹尼尔用概率论研究接种对死亡率的影响,通过对死于天花的案例建立模型,得出种痘者的寿命几乎增加 10% 的结论,消除了人们的恐惧和怀疑。1730 年,丹尼尔·伯努利发表的《赌博法新论》,把他的研究成果推广到人寿保险和健康统计等应用领域。

古典概率论是从讨论赌博问题开始的,在试验中只有有限个事件,且每个事件出现的机会相等,通过计算各种等可能性的数目得出事件的概率值。这种方法有很大的局限性,在更多的场合,根本就无法弄清所有可能的情况,也无法确定不同情况出现的可能性的大小,这时概率的计算极为繁杂,而且很难得出正确结果。

雅各布·伯努利在他的《猜度术》中解决了这一弊端。他提出了被称为"伯努利定理"的极限定理:当大量重复同一试验时,某一事件出现的频率会越来越稳定于某一数值。换言之,随着试验次数的增加,某一事件出现的频率会集中在该事

件的概率。可以用公式表达为 $\lim_{n\to\infty}P(|\frac{\mu_n}{n}-p|<\varepsilon)=1$，当 n 足够大时，事件出现的频率将几乎接近于其发生的概率，此即频率的稳定性。《猜度术》讨论了许多解决概率问题的办法，详尽论述了排列与组合理论，给出机会对策中所产生的各种各样新问题的解答。

法国科学家蒲丰(G. L. L. Buffon，1707—1788)为了验证伯努利定理，做了抛硬币的实验。他让一个小孩向空中掷硬币，对抛掷中出现的正反面的结果进行记录，发现出现正面的次数约为总次数的一半。以下是历史上一些著名数学家做抛硬币试验的数据：

总次数	正面出现的次数	反面出现的次数	正面出现的频率
4 040	2 048	1 992	0.507
4 092	2 048	2 044	0.501
20 480	10 353	10 127	0.505 5
12 000	6 109	5 981	0.509 1
24 000	12 012	11 988	0.500 5

可以看出，当抛掷次数很多时，出现正面的频率接近 1/2，通过实验证实了频率趋近于概率。

“伯努利定理”又称为“大数定律”，即当试验次数很大时，随机变量的算术平均值向常数收敛。大数定律是可以严格证明的定理，是概率论与数理统计学的基本定律之一。

人口统计数据充分体现了大数定律。只要统计样本足够大，男女比例会接近 1∶1。但一些传统观念，比如“重男轻女”会修正这个比例，我国长期的人口普查结果的男女比例为 22∶21，在人口基数庞大的情况下会产生很大的数量差异。大数定律又是博彩业保证盈利的不二法则。当参与博彩的人数足够多时，输赢趋向于平衡，庄家只要通过制定规则占有些许优势，就可以获得巨大收益。按照大数定律，保险公司承保的每类标的的数目必须足够大，否则，缺少一定的数量基础，就不能产生所需要的数量规律，从而承担较大风险。大数定律对天气预报、金融投资甚至推销行为都有指导意义，可以说，它已经深入到我们今天日常生活的方方面面。

3. 数理统计的兴起

统计学是一门很古老的科学，起源可以追溯到古希腊的亚里士多德时代。为了研究当时的社会经济问题，亚里士多德撰写了 150 余种“城邦政情”，内容是对各城邦的历史、行政、科学、艺术、人口、资源和财富等社会和经济情况进行比较、

分析，是带有普查性质的统计活动，属于社会科学范畴。

在黑死病席卷欧洲大陆之后，出于对瘟疫的恐惧和对生命的敬畏，为了分析非正常死亡原因，人们开始对生老病死的过程进行关注。从 1517 年开始，在荷兰、西班牙、法国、英国、德国等欧洲国家，发行了各种参考手册，上面对教区居民的出生、性别、结婚、死亡和死亡原因，以及参加洗礼、举行葬礼等数据进行登记，开始了现代意义的收集、分析统计数据的活动。

1662 年，英国统计学家格兰特(J. Graunt，1620—1674)发表了《从自然和政治方面观察死亡统计表》，他因此被认为是数理统计学的开创者。格兰特是历史上第一个系统地、定量地寻找死亡信息的人，他通过调查伦敦市 60 年来的死亡人数，编制了“生命表”，把人口寿命和死亡率直观地反映出来。在书中，格兰特分析了伦敦居民死亡的原因及其与人口变动的关系，依据大量数据进行统计推断，得出“新生儿性别比例具有稳定性”、“人口出生率与死亡率相对稳定”等结论，提出了“大数恒等定律”，这成为统计学的基本原理。

英国学者佩蒂(W. Petty，1623—1687)运用格兰特的科学方法，在 1690 年发表《政治算术》，对生命统计、保险统计及经济统计进行了数学研究，定量分析了社会经济问题，在英国和欧洲大陆引发了人们的研究热情，开始对人口、农业生产品及国际贸易的数据进行数学分析，作为制定经济政策的依据。统计方法开始与数学计算和推理方法相结合，数理统计学进入萌芽阶段。

数理统计学是研究大量随机现象的统计规律的应用数学学科，它的发展与概率论密不可分。通过应用概率论的成果更深入地分析研究统计资料，对某些现象发生频率的结果加以归纳整理，找出该现象发生的内在规律性，形成数学模型，并作出一定精确程度的判断和预测，是数理统计学的主要内容。统计学推动了概率论的早期发展，而数理统计学使统计学精确化、严密化，成为统计学重要的数学工具。

概率模型应用到数理统计学始于 18 世纪。

英国牧师贝叶斯(T. Bayes，约 1702—1761)以在概率论领域的研究而著名，对数理统计的发展产生了重要的影响。他将归纳推理法用于概率论基础理论，提出贝叶斯定理，可以简化表达为公式：后验概率=(相似度×先验概率)/标准化常量，这样就可以通过条件概率以及边缘概率分布推导出未知随机变量的概率。贝叶斯定理对于所有概率的解释都是有效的，打破了概率源自频率的古典定义，形成了“逆概率”的概念，成为统计模型决策中的一个基本方法。在已知类条件概率密度参数表达式和先验概率情况下，可以利用贝叶斯公式转换成后验概率，再根据后验概率大小进行决策分类。贝叶斯统计理论推动了统计决策函数、统计推

断、统计估算的发展。

为了分析天文观测中的误差，高斯和法国科学家勒让德（A. M. Legendre，1752—1833）发展了最小二乘法原理（又称最小平方法），通过把误差的平方和最小化，寻找数据的最佳匹配函数。假如实验数据为$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$（可视为平面上的点），我们所要求的曲线$y=f(x)$同这些点的距离最小。如果用坐标之差表示距离，值有正、有负，加在一起时会互相抵消。因此，我们要求距离的平方和最小，这也是最小二乘法名称的由来。图3-15是最小二乘法的示例，点表示实验得到的数据，直线是使用最小二乘法求得的最佳解，截距表示误差。

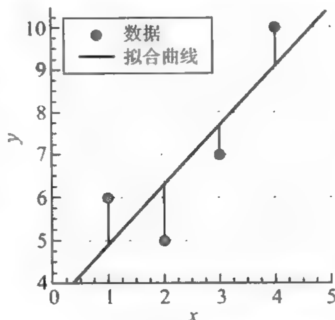


图3-15 最小二乘法的示例

很多随机变量的分布符合数学期望为μ，方差为σ^2的正态分布，记为$N(\mu,\sigma^2)$，期望值μ决定了其位置，标准差σ决定了分布的幅度。因其曲线呈钟形，人们又经常称之为钟形曲线，见图3-16。正态分布分别由棣莫弗和高斯独立发现，正态分布也叫作高斯分布。正态分布是最重要的一种概率分布，应用极其广泛，工业生产的误差、人体医学指标甚至考试成绩都符合正态分布规律，是数理统计的重要基础之一。

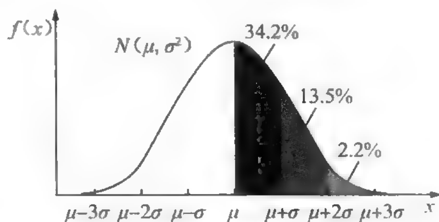


图3-16 正态分布概率密度曲线（钟形曲线）

19世纪中叶，数理统计学理论得到新的发展。比利时统计学家凯特勒（A. Quetelet，1796—1874）把统计学方法的应用范围扩大到天文学、数学、物理学、生物学、社会统计学及气象学等诸多学科，强调正态分布适用于许多科学领域，并在社会科学的范畴内提出了他的大数思想，认为一切社会现象都受到大数定律的支配。凯特勒使统计方法获得普遍应用，被称为近代统计学之父。英国生物学家高尔顿（F. Galton，1822—1911）最早将概率统计原理等数学方法用于生物科学，明确提出“生物统计学”。在著作《自然的遗传》中，高尔顿提出了回归直线、相关系数的概念，开创了优生学的先河。他用百分位数法和四分位偏差法代替离差度量，现在的随机过程研究中还有以他的姓氏命名的高尔顿—沃森过程。高尔顿关于回归分析的先驱性工作，以及时间序列分析的工作，是数理统计学发展史中的重要事件。

概率论与数理统计的发展

概率论与数理统计学在创立之初，带有较多的社会学属性，尽管在 20 世纪前已经取得许多重要的成果，但这个时期的论文和著作显然缺乏数学的严格性。在经历了一个演变过程之后，概率论与数理统计学才真正发展成为严格的数学学科。

1. 分析概率论

微积分诞生之后，刺激和推动了许多数学新分支的产生，形成了"数学分析"这个新的数学领域。随着数学分析的蓬勃发展，它也成为研究概率论的工具，使概率论逐步走向系统和成熟。

法国数学家拉普拉斯(P. S. Laplace，1749—1827)在研究概率论时，运用了微分方程、特征函数和反演公式、母函数、积分等数学分析工具。他在 1812 年出版的《概率的分析理论》中，明确了概率的古典定义"事件的概率等于有利于事件的结果数与所有可能的结果数之比"，给出了独立事件的加法、乘法法则，推导出了中心极限定理。拉普拉斯运用数学分析工具处理概率论的基本内容，使以往零散的结果系统化，实现了从组合技巧向分析方法的过渡。

极限定理在概率论中占据重要的地位，作为分析随机世界的理论基础，被认为是概率论的首席定理。拉普拉斯通过推广伯努利在大数定律方面的工作，发展了法国数学家棣莫弗(A. de Moivre，1667—1754)的理论，导出中心极限定理(后称棣莫弗—拉普拉斯定理)：$\lim\limits_{n\to+\infty} P(\frac{S_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leqslant x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du$。

中心极限定理说明，随机变量的数目无限增多时，其和的分布函数在一定的条件下收敛于正态分布函数。中心极限定理研究的就是随机变量的和渐近于正态分布的规律性，它可以给出变量偏离程度的定量描述。

19 世纪后期，极限理论成为概率论研究的中心课题，俄国数学家切比雪夫(П. Л. Чебышев，1821—1894)在这方面做出了重要贡献。他在 1866 年建立了关于独立随机变量序列的大数定律，使伯努利定理和泊松大数定律成为其特例。切比雪夫还将棣莫弗—拉普拉斯极限定理推广为更普遍的中心极限定理。

中心极限定理把许多我们无法了解或了解得很少的随机事件的概率分布，归结为已知的正态分布，这样就可以对知之甚少的事物作进一步的研究了。

2. 概率论的公理化

古典概率论中基本概念的含糊与矛盾导致很多悖论的产生。同时，概率论在物理学、生物学等领域的应用，也需要对概率论的概念、原理做出准确解释。概率论亟待严格化。

贝特朗悖论在当时引起了广泛争论。1889 年法国数学家贝特朗在他的《概率论》一书中给出了这样一个问题:在半径为 1 的圆内随机地取一条弦,问其长超过该圆内接等边三角形的边长的概率为多少?贝特朗给出了三种不同的解法。

解法 1:任何弦交圆周两点。不失一般性,先固定其中一点于圆周上,以此点为顶点作一内接等边三角形。显然只有落入此三角形的弦才满足要求,而这个三角形所切弧的长度为整个圆周的 1/3,故所求概率为 1/3(图 3-17 a)。

解法 2:弦长只跟它与圆心的距离有关,而与方向无关,因此可假定它垂直于某一直径。对于这种弦,当且仅当它与圆心的距离小于 1/2 时,其长才大于内接等边三角形的边长。因此所求概率为 1/2(图 3-17 b)。

解法 3:弦被其中点唯一确定,当且仅当其中点属于半径为 1/2 的同心圆内时,弦长大于内接等边三角形边长。而此小圆面积为大圆面积的 1/4,故所求概率为 1/4(图 3-16 c)。

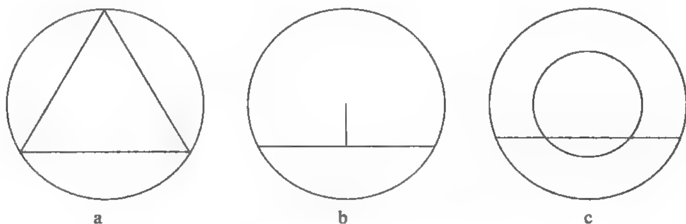


图 3-17　贝特朗悖论的三种情形示意

无论三种情形中的哪一种,都假定各自的参数均匀地分布在给定的区域里。即,解法 1 中,假定一端固定而另一端点在圆周上均匀分布;解法 2 中,假定弦的中点在直径上均匀分布;而解法 3 中,又假定弦的中点在圆内均匀分布。这就形成了同一个问题有三个不同解的悖论。事实上,原题中“随机地取一条弦”的提法过于不明确,在严密概率逻辑之后,我们现在知道由于投影的不均匀性,只有第一个解法的结果是正确的,所求概率为 1/3。

20 世纪初,数学家们发现测度论及度量函数是严格概率论基础的合适工具。前苏联著名数学家柯尔莫戈洛夫(A. N. Kolmogorov,1903　1987)在这方面的成就最为卓著。1933 年,柯尔莫戈洛夫出版了《概率论基础》,建立起以测度论为基础的概率论公理化体系,他提出测度与事件概率的类比、积分与数学期望的类比、函数正交性与随机变量独立性的类比等,赋予概率论以演绎数学的特征,使概率论大厦建筑在公理化体系之上。这成为概率论发展史上的一个里程碑,使概率论成为一门严格的演绎科学,并通过与集合论及其他数学分支密切的联系,奠定了现代概率论的基础。

概率论的公理化 -旦完成,对随机现象的解释就变得准确、严密,游刃有余。

概率论的公理化是将概率概念从频率解释中抽象出来，然后又应用回现实世界。从此，概率论的应用范围被大大拓广了。

3. 数理统计学的成熟

随着概率论的发展，数理统计学被应用到更广泛的领域当中。同时，通过运用更多的数学工具，与数学分析、测度论、矩阵代数以及泛函分析、拓扑学、近世代数等学科相结合，数理统计学逐步演化为成熟的数学分支。

大样本统计方法研究样本大小 n 趋于无限时，统计量和相应的统计方法的极限性质（又称渐近性质），并据以构造具有特定极限性质的统计方法，是数理统计学重要的组成部分。英国数学家、律师、作家、艺术史家和社会活动家皮尔逊(K. Pearson，1857—1936)等人取得的成果，成为大样本统计的先驱。皮尔逊把数理统计应用于生物遗传和进化诸问题，提出“总体”、“众数”、“标准差”、“变差系数”等术语，进一步发展了回归及其相关的理论。1900 年，皮尔逊提出了检验拟合优度的 χ^2 统计量，并证明其极限分布是 χ^2 分布。英国学者戈赛特(W. S. Gosset，1876—1937)改进了皮尔逊的方法，并署名为“Student”发表在 1908 年的《生物统计学》上，这就是“t-分布”，对大、小样本均适用，现在已经成为数理统计中最常见的分布和工具。

英国统计学家、遗传学家费希尔(R. A. Fisher，1890—1962)是现代数理统计学的开创者，他的《理论统计的数学基础》成为现代数理统计学的奠基作之一，提出的数理统计学原理和方法对人类遗传学、进化论和数量遗传学的基本概念以及农业、医学方面的试验均有很大影响。费希尔引进了解消假设和显著性检验的概念，开创了假设检验理论，他列举了一致性、有效性和充分性作为参数估计量应具备的性质；建立了以最大似然估计为中心的点估计理论，阐明了最大似然性方法以及随机化、重复性和统计控制的理论；论证了方差分析的原理和方法，并与英国统计学家耶茨(F. Yates，1902—1994)合作应用于实验设计。进行实验设计，除了构思实验内容之外，还要考虑使实验的周期尽量短、经济指标尽量高、数据结果尽量可靠，费希尔凭借随机化的手段，成功地把概率模型带进了实验领域，并作为分析这种模型的一个方法，建立了方差分析法。他提出的随机化、局部控制和可重复三原则，成为实验设计的准则。

第二次世界大战以后，由于经济和科学技术的飞速发展，数理统计学的应用更为广泛，并通过使用更加复杂的数学工具，把理论引向深入与完善。同时，电子计算机的普及，使数理统计理论的验证和统计方法的实施迈上了新的台阶。

原籍罗马尼亚的美国数学家瓦尔德(A. Wald，1902—1950)对数理统计学的发展影响极大。瓦尔德从 1939 年开始发展了统计判决函数理论，他的成果收入 1950 年出版的《统计决策函数》一书中。在这个理论中，他把推断程序全体作为

一个整体集合来考虑,命名为判决函数空间。通过定义集合的风险函数、损失函数、极大极小原则和最不利先验分布,作为推断程序好坏的准则,成功地把各类数理统计问题统一起来,形成了新的检验和判决方法。

瓦尔德还提出序贯分析理论,研究了"序贯抽样方案",利用这种抽样方案得到的样本去做统计推断。所谓序贯抽样方案是指在抽样时,不事先规定总的抽样个数(观测或实验次数),而是先抽少量样本,根据其结果,再决定停止抽样还是继续抽样、抽多少,这样下去,直至决定停止抽样为止。序贯抽样方案很快应用到战时军需生产验收工作中,由于远小于平均抽样次数,有效提高了生产效率。除了检验问题以外,序贯方法在一般的统计决策、点估计、区间估计等方面都有应用。

数理统计学几乎渗透到一切学科,只要有实验,只要有数据,就少不了数理统计。

奇妙的随机世界

在现实世界中,随机事件是介于必然事件与不可能事件之间的现象和过程,普遍存在于自然界、社会和思维领域。宏观世界中必然发生的、确定性的事件在其细节上会带有随机性的偏离。微观世界中单个客体的运动状态都是随机性的。一个随机过程是一个不定因子不断出现的重复过程,但它可能会遵循某个概率分布。研究一个随机事件的概率,可以解释该事件发生的可能性的大小。大量重复出现的随机事件表现出统计的规律性。对随机过程的研究,是概率论与数理统计的重要内容。

布朗运动是一种典型的随机过程。1827 年,苏格兰植物学家布朗(R. Brown, 1773—1858)通过显微镜发现水中的花粉及其他悬浮的微小颗粒不停地作不规则的曲线运动(后被称为布朗运动)。经过长期观察,发现其他微细颗粒也有同样的现象,具有无规则、相互无关联、永不停歇、温度越高越活跃、与成分密度无关的特点,是一种呈正态分布的独立增量连续随机过程。

20 世纪初,爱因斯坦和波兰物理学家斯莫鲁霍夫斯基(M. Smoluchowski, 1872—1917)完成了布朗运动的定量解释。他们发现不管粒子的运动有多么不规则,都可以用概率方法进行分析。爱因斯坦的结论可以概述为:令 $\rho=\rho(x,t)$ 是一个布朗运动粒子在时间 t 及位置 x 的概率密度($x\in\mathbf{R}^2$),然后在某些概率假设下,导出$\frac{\partial\rho}{\partial t}=D\Delta\rho$,这里 D 为常数,称之为扩散系数。

美国数学家维纳(N. Wiener, 1894—1964)则从数学角度研究布朗运动。1921 年,他用函数空间的点来表示做布朗运动的粒子的路径,并证明,所有这些路径除了概率为 0 的集合外,都是连续但又不光滑即几乎处处不可微的。他运用

勒贝格积分计算了这些路径上函数的平均值。1923 年，维纳第一次给出随机函数的严格定义，证明可以是布朗运动的理论模型。维纳研究"路径"的集合，引进维纳测度，揭示了连续而不可微函数的物理特征。

布朗运动代表了一种随机涨落现象，其理论是应用领域最为广泛的随机过程理论之一。

在物理学领域，爱因斯坦从分子运动论的角度解释了布朗运动的规律，布朗运动理论也成为分子运动论和统计力学发展的基础。对测量仪器的精度限度的研究，对高倍放大电子电路中的背景噪声的研究，都会用到布朗运动理论。

在金融领域，将布朗运动与股票价格行为联系在一起建立起的数学模型是20 世纪的一项具有重要意义的金融理论创新，在现代金融数学中占有重要地位。迄今，普遍的观点仍认为，股票市场是随机波动的，随机波动是股票市场最根本的特性，是股票市场的常态。布朗运动理论也是现代资本市场理论的核心假设，认为证券期货价格具有随机性特征。这里的所谓随机性，是指数据的无记忆性，即过去数据不构成对未来数据的预测基础。

数理统计与大数据时代

今天，我们已经从信息时代走进大数据时代，每时每刻都有文字、数字、声音、图像、测量结果转换成数据，在我们身边的计算机、笔记本电脑、智能手机、家电甚至大型设备之间进行传递，我们已经淹没在数据的海洋中。

最早提出"大数据"时代到来的是全球知名咨询公司麦肯锡，它称："数据，已经渗透到当今每一个行业和领域，成为重要的生产因素。人们对于海量数据的挖掘和运用，预示着新一波生产率增长和消费者盈余浪潮的到来。"其实"大数据"在物理学、生物学、环境生态学等领域以及军事、金融、通讯等行业出现已有一些时日，只是近年来由于互联网、网商经济和信息行业的发展而引起人们的特别关注。它对社会经济生活产生的影响绝不限于技术层面，更本质上，它是为我们看待世界提供了一种全新的方法，即决策将日益基于数据分析作出，而不是像过去更多凭借经验和直觉作出。"大数据"的影响不仅限于经济领域，它对政治、文化乃至社会生活的方方面面都会产生深刻的影响。智能电网、智慧交通、智慧医疗、智慧城市等的蓬勃兴起，都与大数据技术的发展息息相关。

面对 4V（Volume—大量、Velocity—高速、Variety—多样、Value—价值）的海量数据，虽然云计算等技术手段已经能胜任数据的采集和存储，但仍离不开数理统计学对"大数据"的处理。数理统计学在帮助我们完成收集有效数据之后，还要对数据进行科学分析，比如针对一组数据，需要描述出数据中的最大值、最小值、平均值、数值的分布和趋势，从而挖掘出数据的价值，实现更强的决策力、洞察发

现力和流程优化能力。

数理统计和应用数学的发展，为我们提供了各种有效的统计和数学模型，而以云计算为代表的计算技术的不断进步，为我们提供了强大的数据处理能力，这就针对个人以及组织的行为构建起了一个与物质世界相平行的数字世界。

大数据的两大支柱是“模型”和“算法”。首先要做的就是给数据赋予某种数学结构。当前，这种结构主要是各种各样的统计模型，包括对数据的各种前期分析，如对高维数据的降维处理等。当然，由于数据类型的多样性，也可以考虑其他的数学模型，如拓扑模型、几何模型或网络模型等。大数据的另一重要支柱是“算法”，例如数据挖掘和机器学习的计算方法，尽量降低计算量并采用云计算技术等。大数据不仅与概率统计和计算方法学科有关，也涉及很多其他数学分支，例如压缩感知的理论及应用、图像处理的理论和方法、组合排序理论、优化理论和方法，等等。

大数据带来的信息风暴正在变革我们的生活、工作和思维，大数据开启了一次重大的时代转型，对人类的认知和与世界交流的方式提出了全新的挑战。大数据时代的来临为数学和统计学工作者带来了前所未有的机遇和挑战。

五、拓扑学——从莫比乌斯带说开去

莫比乌斯带是什么

“莫比乌斯带”是1858年由德国的数学家和天文学家莫比乌斯(August Ferdinand Möbius,1790—1868,图3-18)与利斯廷(Johann Benedict Listing,1808—1882)各自独立发现的。

关于莫比乌斯发现“莫比乌斯带”,有一个很美好的故事:在一个阳光美好的午后,莫比乌斯静静地坐在桌前,他手中拿着一个长长的纸条,不经意地把纸条拧了一个圈,又把两个头对接了起来。这时正好有一只蚂蚁爬到了他的桌子上,他小心翼翼地把蚂蚁请到了手中的纸上,蚂蚁开始在纸带上到处游荡。莫比乌斯静静地注视着纸上的小蚂蚁,他发现蚂蚁虽没翻越任何一处的纸边沿,却爬过了纸表面的每一个地方,这让莫比乌斯惊讶不已。



图3-18 莫比乌斯



图3-19 将一条长方形条带一端翻转180°之后,首尾相连,就做成一个“莫比乌斯带”

把一条纸带扭转180°后,两头再粘接起来做成的纸带圈,具有魔术般的性质:它没有正反面之分,如图3-19所示。普通纸带具有两个面:一个正面,一个反面,即所谓双侧曲面,两个面可以涂成不同的颜色;而莫比乌斯纸带只有一个面,即单侧曲面,一只小虫可以爬满整个曲面而不必跨过它的边缘。

如果试图将莫比乌斯带的一面着色,你会发现最后这图形的“两面”都会被我们上色。可见,莫比乌斯带只有“一面”,那么,到底是什么使得莫比乌斯带不同于一个未曾半转的纸带所粘成的一般圆柱面带子呢?答案是:正规的带子是可定向(也称可赋向)的,而莫比乌斯带是不可定向(或称不可赋向)的。可定向性这个概念是一个曲面的真实特质。直观地看,可定向

性是指可以明显区分顺时针和逆时针，或者左手向和右手向。不可定向曲面也称单侧曲面，所有可定向曲面都是双侧曲面。

比如，从莫比乌斯带上某一点开始向一个方向移动，依固定间隔画下移动方向箭头，当完整绕一圈后，到达的是原始点的另一面，此时箭头可以重叠，但是方向完全改变。这个结果就意味着：对于这个特定的曲面而言，完全不能区分顺时针和逆时针，方向概念是没有意义的。如果你在圆柱面带子上重复这个过程，得到的结果就完全不一样了。当你完成一圈带子的绕行，并回到原始位置时，箭头指向仍然与之前相同。

这个可定向的抽象概念也可用手向来理解。在莫比乌斯带上画出人手的轮廓，并绕带子一周，最后会发现手向改变了：从你所在的三维空间看这条带子时，会认为左手与右手互换了。在莫比乌斯带里，无法确定左手或右手的概念。

莫比乌斯带概念在文学和艺术、工业领域提供了创意或得到运用（图 3-20）。例如在工业制造上从莫比乌斯带得到设计灵感的传送带能使用更长的时间，因为可以更好地利用整个带子；或者用于制造磁带，可以承载双倍的信息量。人们还以莫比乌斯带为模型设计了著名的莫比乌斯住宅。


图 3-20　莫比乌斯带雕塑，位于德国埃森市的城市公园内

从莫比乌斯带到曲面拓扑

拓扑学，在 19 世纪以前，几乎没有自成一体的研究，关于它较早的阐述是接近 17 世纪末，莱布尼茨用“位置几何”这个术语描述一种定性数学（今天可能被看作拓扑学），并且预见到在此领域的重要研究，但是他的预言直到 20 世纪才得到印证。18 世纪，拓扑学被称作“位置分析”。拓扑（Topologie）这个术语是高斯的学生利斯廷 1847 年在《拓扑学概论》中最先引进的，那是第一本关于拓扑学的著作。普林斯顿大学教授莱夫谢兹（S. Lefschetz）后来把德文字 Topologie 英化为 Topology。

拓扑学所研究的几何内容不包括直线和平面的概念，而是图形各点之间的连续连通性。就是说，要探讨一个图形经随意变形（但不允许撕破或粘连）后保持不变的性质。因此决定哪些概念能成为拓扑概念，使得能用这些概念探讨图形的拓扑性质，就成为数学家的首要任务，拓扑概念有单侧曲面、可定向性、曲面连通数、贝蒂数等。举例说来，球面的拓扑性质与椭球面、立方体、四面体相同，但球面和

环面的拓扑性质不同，因为一个球面若不许撕破也不许粘连就不会变成环面；又如莫比乌斯和利斯廷早期发现的莫比乌斯带是单侧曲面且不可定向。莫比乌斯带引发的拓扑学早期研究都指向二维曲面，且由莫比乌斯带引出的几何问题发展为曲面的拓扑学，当然曲面拓扑学的起源不仅仅局限于这个单一例子。拓扑学的基本概念是如此地重要，使得人们虽然不懂拓扑学的内容，但却在生活中有意识无意识地使用这些概念，如内部性和外部性、左旋性和右旋性、环绕性和非环绕性，等等，这些概念确实可以反映事物的本质。

莫比乌斯曾给出拓扑学的定义：拓扑学是有关拓扑变换后保持不变的图形性质之研究。莫比乌斯给出的拓扑变换的定义是：从一个图形映射到另一个图形的变换，其中原图形中任意两个紧紧相邻的点，在变化过的图形中依然紧紧相邻。这定义里“紧紧相邻”的前提条件是：允许延长，但禁止切开或撕开；“紧紧相邻”甚至包括一个图形为了要进行某种操作而切开，然后粘回去，切开前紧紧相邻的点在变换完成之后还是紧紧相邻。因此，拓扑学是讨论当大小和形状都变化时位置性质不变的一门数学分支。18世纪数学家已经领悟到，图形拥有的形状比几何学的模式来得更为抽象。拓扑学的研究对象是曲面、扭结、网络及许多其他图形，也许最具体的定义拓扑性质的说法是说它们是在伸缩或弯曲之下保持不变的几何性质。拓扑学充满着显而易见的悖论和不可能性，而且可能比任何其他数学分支都更有趣。

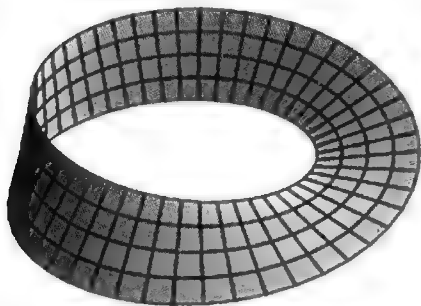


图3-21　用数学软件 Matlab 绘制的莫比乌斯带

从拓扑性质来看莫比乌斯带(图3-21)，它是不可定向的。可定向性是一个曲面的拓扑特质。因为圆柱面是可以定向的，而莫比乌斯带却不是，所以从拓扑的观点来看，这两种曲面一定是不同的，也不可能用拓扑变换将圆柱面变换为莫比乌斯带，这与我们的直观也是相符的。唯一可以将莫比乌斯带“物理地”变换成圆柱面的方法，就是切开它，消除那个半转，再将切开的两端粘回去。但是这个消除半转的动作，意味着当两个自由端重新接起来的时候，因切割而分开的原本紧紧相邻的点，彼此就不再相邻了。也因此，这个变换并不是一个拓扑变换。

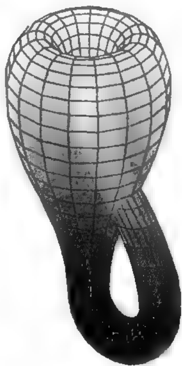
如果对莫比乌斯带做一些变形会有一些有趣的结果。如果沿着中线剪开，剪一周回到起点，虽然已经将纸带剪成“两半”，但它仍然是连成一片①，这就是所谓

①用剪刀沿中线剪开莫比乌斯带，不会像你可能期望的那样变成两片，它将变成一个双侧的有两次全扭转的带子。

的“环割”——在曲面上完全避开边缘，从一点开始剪并结束于该点。环割可以确定曲面的“贝蒂数”①，数学家发现贝蒂数是曲面的拓扑不变量，即经过拓扑变换（拉伸、变形等）不会改变的量。把仅有一条边缘的曲面分割成两块以上（或一般地说，将一个有 m 条边的曲面分割成 $m+1$ 块以上）的最大环割数，就是曲面的贝蒂数。也可用“交割数”确定贝蒂数，就是指在一个曲面上最多可以剪几个割口而不把曲面割开时割口的数目。割口可以想象成用剪刀来剪，要求从边上开始剪，并剪至边上结束，这种割口称为交割。圆盘上有一个交割就分成两块，因此圆盘的贝蒂数为0，而莫比乌斯带的贝蒂数是1。在用来确定贝蒂数之前，交割与环割被德国数学家黎曼于1857年用来定义曲面的连通度。连通度是指，若曲面的连通度为 h，则可做 $h-1$ 条闭曲线而不剖分开曲面，但任一组 h 条闭曲线至少把曲面分成两片。这是关于曲面的一个重要拓扑不变量，例如，对于圆盘、球面，连通度 h 是1，也称作单连通曲面；环面的连通度 h 为3，等等。要得到更高的连通度，可用容易揉捏的物质做成球，捏扁，再开几个洞，那么有 p 个洞的曲面，其连通度 $h=2p+1$。容易看出来，连通度比贝蒂数总是多1，也就是说，贝蒂数是剖分不开曲面的曲线数，而连通度就是在贝蒂数的基础上增加1，这两个概念对于描述曲面的本质而言是一致的。

用上面提到的拓扑性质再考察圆盘、球面、环面、莫比乌斯带等不同曲面时，会发现有很多连通度为奇数的曲面，如我们常见的圆盘、球面、环面、有洞的轮胎面等，而单侧曲面莫比乌斯带的连通度为偶数！那么是否单侧曲面的连通度都是偶数呢？答案是否定的。

另一种单侧曲面克莱因瓶，是德国数学家克莱因于1882年发现的，如图3-22所示。设想把一个内胎割开弄直成圆柱面，一端扩大而形成一个基底，另一端缩窄而形成一个瓶颈；然后将窄端弯扭推入气阀孔内，最后将它变阔与基底处的开口端粘合。这可以称作“有孔”


图3-22 三维空间中的克莱因瓶

①贝蒂数虽然直到1895年才被法国数学家庞加莱这样称呼，但它有一个长而有趣的历史。德国物理学家基尔霍夫在1847年的一篇文章中引入两个著名的电路网络定律，用贝蒂数概念去刻画在一个网络中确定电流分布时用到的独立环路方程的个数。这个概念被英国物理学家麦克斯韦沿用，在他1873年出版的教科书《电磁通论》中称其为“圈数”。被公认为现代拓扑学之父的庞加莱用意大利数学物理学家贝蒂（Enrico Betti）的名字命名，是缘于贝蒂于1871年推广了黎曼的连通度数。可以看出，基尔霍夫和麦克斯韦使用贝蒂数的思想比庞加莱在数学中确立这一名称早了整整一代。

的克莱因瓶[①],内胎之洞成为瓶子的开孔。为了拓扑学的目的,通常假设没有洞,即这个单侧曲面穿过了自身。现实中这是办不到的[②],但是拓扑学家可以自由地运用这类神奇性质。一个克莱因瓶可以想成是将一对莫比乌斯带的边缘粘起来;一个克莱因瓶也能够分成两半,打开来得到两个莫比乌斯带[③]。

在克莱因瓶中应用连通度的一般定义可知,克莱因瓶的连通度跟环面一样为3。虽然克莱因瓶与莫比乌斯带的连通度不同,但二者可以互相得到。如上所述,莫比乌斯带的模型可以从克莱因曲面消去一组对边的叠合关系得出;而沿着克莱因瓶上一条适当选择的闭曲线剪开,也可以得到莫比乌斯带。对于单侧闭曲面来说,连通度既可以为奇数,也可以为偶数;但对于双侧闭曲面来说,连通度都是奇数。有了连通度等曲面的拓扑不变量,数学家开始关注等价的拓扑映射,比如将所有能互相拓扑映射的曲面划为一类,彼此可以代换。两个图形能由一个通过拓扑变换变成另一个,称为同胚的或拓扑相等。

拓扑学的发展

我们一直在讨论几何与拓扑,那么自然出现的问题是,拓扑是否从属于通常意义下的几何?拓扑学从广义上是几何学的分支,但是它在20世纪成为一门独立的数学分支,与数学的许多分支相关联,取得了与几何学、代数学和分析学同等重要的地位。我们仅讨论了反映其几何根源的那些方面——曲面拓扑,一方面,是因为它在数学上直观,使我们能够充分理解;另一方面,是因为它是与空间几何有密切关联的唯一拓扑领域,且曲面拓扑的例子足够说明一些重要的拓扑概念。曲面拓扑的历史起点始自笛卡尔和欧拉的多面体理论。

多面体的第一个拓扑性质是笛卡尔在17世纪30年代发现的。笛卡尔的原文已遗失,但1676年莱布尼茨曾抄录笛卡尔的文章,1860年人们在莱布尼茨的著作中发现摹本。1752年欧拉重新发现这个性质,以现今"欧拉示性数"之名著称于世。如果多面体有V个顶点,E条边,F个面,则它的欧拉示性数是$V-E+F$。欧拉证明,对于所有凸多面体,这个量是不变的,即$V-E+F=2$。这个等式

---

①如果假设克莱因瓶没有孔,那它就没有边;如果我们需要它有一个孔和一条边,就考虑"有孔"的克莱因瓶。

②克莱因瓶不像莫比乌斯带那样容易构作,一般只能在想象中做出来,只要假设材料同内胎橡皮一样,可自由拉伸和收缩就行了。与莫比乌斯带一样,所得图形只有一侧。

③当把克莱因瓶切成两半时,会发现莫比乌斯带与克莱因瓶有着亲密的血缘关系。如果假设瓶子的材料能拉伸和收缩,那么从上到下切开瓶子,半个克莱因瓶就可以变形为一个莫比乌斯带。

就是著名的欧拉多面体公式。实际上，笛卡尔已经得到相同的结果，只是用了两个公式表达：$P=2F+2V-4$，$P=2E$，其中 P 是笛卡尔所称的“平面角”的个数，平面角是由一对相邻边决定的面上的夹角。$P=2E$ 表示每条边都参与了两个角的构成。应该强调的是，笛卡尔的“平面角”丝毫不涉及角的度量，因此它恰如欧拉的“边”一样是个拓扑概念。所以笛卡尔的结论与欧拉的一样，同属于拓扑学范畴，只是他没有提炼出“欧拉示性数”这样好的概念。

实际上，这两位数学家都没有充分地从拓扑学的角度去理解这个多面体公式。他们在证明中都使用了非拓扑概念，如角的度量等；他们没有认识到顶点、边和面在任意曲面上的意义：边不一定是直线，面不一定是平面。另一些关于欧拉多面体公式的早期证明，也依赖角的度量及其他通常的几何量。

庞加莱最先从纯粹拓扑的角度理解 $V-E+F$(1895)。庞加莱将欧拉示性数推广到了 n 维流形上，他对多面体的基本看法是：一个顶点将一条边分成两条边，一条边将一个面分为两个面。由此可知，无论怎样将一个多面体的边和面再细分，$V-E+F$ 都将保持不变：如果在一条边上引入一个新顶点，则 V 和 E 同时增长 1；如果在一个面上引入一条新的边，则 E 和 F 也同时增长 1。对于这种细分过程的反过程——称为共合过程，$V-E+F$ 同样保持不变。$V-E+F$ 在凸多面体类上的不变性是指：能够证明该类中任一多面体 P_1，可以通过细分和共合转变为类中另一任意的多面体 P_2。

在 19 世纪 50 年代至 80 年代，几条不同的研究路线都提出了对曲面进行拓扑分类的要求。一条路线是欧拉传下来的寻求对多面体的分类；另一条路线来自黎曼关于代数曲线的黎曼面表达法(1851，1857)，与此相关的是 1882 年庞加莱和克莱因所考虑的镶嵌对称群的分类问题；还有一条路线是 1863 年莫比乌斯关于通常空间中光滑闭曲面的分类问题。当沿着这些不同的研究路线研究下去时，都发现在各种情形下曲面都可被边(不一定是直线)细分，使其变成广义多面体，这些路线就收敛到了一起。广义多面体传统上称为闭曲面，现代拓扑学家则将其描述为紧的且没有边界的曲面。

针对欧拉示性数 $V-E+F$ 的不变性的细分论证适用于任何一个广义多面体，而不仅仅是那些同胚于球面的多面体，也不仅仅是由平的面和直的边构成的多面体。黎曼(1851)和若尔当(1866)得到了同一个结论：任一闭曲面(在同胚意义下)由它的欧拉示性数所决定。1863 年莫比乌斯发现的“范式”曲面代表了那些可能有不同的欧拉示性数的曲面，看起来这些范式在拓扑上是不同的，因为它们具有的“洞”的个数不同。论证的核心是，证明任何一个闭曲面必与其中之一同胚。

黎曼的假设(曲面是黎曼面)和莫比乌斯的假设(曲面可以光滑地嵌入3维欧氏空间)对于纯拓扑证明而言都是不必要的,而且它们还都暗含着一个假设,即可定向性(双侧性)。从广义多面体的公理定义出发的严格证明是由德恩和赫戈1907年给出的。结果是,闭可定向曲面的确就是那些有洞的曲面,但除此之外还存在不可定向曲面,它们与可定向曲面是不同胚的。

莫比乌斯带就是最简单的不可定向曲面,除此之外,还有射影平面与克莱因瓶。不可定向曲面在同胚意义下也是由欧拉示性数决定的,欧拉示性数深刻地反映了曲面的几何性质。由于黎曼面都可定向,所以它们不属于不可定向曲面。

在多边形上推证问题比在曲面上或它的多面体结构上推证问题往往更方便。例如,一直使用多边形而不使用多面体,切开并粘贴这些多边形(代替细分和共合),最终得到克莱因基本多边形,基本多边形的欧拉示性数 X 很容易计算,并显示 X 与亏格 g(洞的个数)相关:$X=2-2g$。用亏格决定曲面比欧拉示性数更简单,但是欧拉示性数更好地反映了曲面的几何性质。

当笛卡尔定理在1860年首次发表时,高斯—博内定理已广为人知,两者之间的相似性被贝特朗1869年关注,他认定:高斯那些漂亮的概念无论如何都不能认为是笛卡尔定理的推论。这在狭义上说也许正确,但笛卡尔和高斯—博内定理可彼此视为对方的极限形式。高斯—博内→笛卡尔,是通过将曲面上的曲率集中在顶点上,直到它变成多面体的结果;而笛卡尔→高斯—博内,是通过增加多面体顶点的个数,直到它变成光滑曲面的结果。

庞加莱1895年首次从拓扑上给出了基本群的定义,开创了现代拓扑学研究。他1895—1905年间发表的一系列论文,将几何图形剖分成有限个相互连接的基本片,并用代数组合的方法研究其性质,用这样的观点加以研究的拓扑学叫作组合拓扑学。庞加莱定义了高维流形、同胚、同调,引进一系列拓扑不变量,奠定了组合拓扑学的基础。

1928年霍普夫(H. Hopf)定义了同调群,这个概念的引进逐渐将拓扑问题转变为抽象代数问题。从拓扑到代数过渡的另一条途径是同伦理论,是与流形之间的连续映射的连续变形有关的研究。波兰数学家胡勒维兹(W. Hurewicz,1904—1957)在1935—1936年间引进了 n 维同伦群概念。同调论与同伦论一起推动组合拓扑学逐步演变成主要利用抽象代数方法的代数拓扑学。1942年美国数学家莱夫谢兹出版《代数拓扑学》一书,标志代数拓扑学这一分支学科正式成立。

除组合与代数观点之外,数学家也通过点集论研究连续性,从而建立了所谓的"点集拓扑学",也被称为"一般拓扑学"。1914年德国数学家豪斯道夫(F. Hausdorff)发表《集合论基础》一书,以"邻域"概念为基础,定义了抽象的拓扑空

间，并引进连续、同胚、连通、维数等一系列概念，标志着点集拓扑学的正式诞生。拓扑学各大分支在20世纪30年代以后不断趋于成熟。

我们最初习惯于出于度量考虑建立几何学，而莫比乌斯带的发现恰恰推动了与度量几何的分离，所以在自成体系的拓扑学发展中占有一席之地。空间几何包罗了形形色色的几何：欧氏几何、射影几何①、非欧几何、代数几何、微分几何以及拓扑学等。数学家们试图寻找不同几何学之间的内在联系，用统一的观点来解释它们，这是数学家们追求的宏伟目标。莫比乌斯带的发现，开启了曲面理论的分类研究——将曲面分为可定向曲面与不可定向曲面。为了对这些曲面的拓扑性质进行研究，数学家们引入了亏格、贝蒂数、基本群等各种不变量，并得到高斯-博内公式，最终走向代数拓扑与微分拓扑。欧几里得是对的：数学里没有王者之路。无论从哪个侧面进入数学，终究都会遇到困难，而消除困难除依靠逻辑之外，更重要的是通过与数学其他分支的相互联系消除困难。

---

①在克莱因的几何学分类中，以射影几何为基础，包含有仿射几何、单重椭圆几何、双重椭圆几何和双曲几何。

六、计算机对数学的影响



电子计算机的问世还不到一个世纪，它对人类经济、社会乃至整个人类文明的影响已经超过了其他任何事物，并在许多方面可以同工业革命相提并论。发生在200多年前的工业革命先是对生产与交通产生巨大冲击，然后随着电力、汽车、电器以及化学制品的问世，不仅对生产也对人类的生活带来了一系列的变化。来自中国经济信息网的数据显示，2009年我国的个人电子计算机保有量已经达到2.2亿台(套)，服务器数量接近373万台(套)。据估计，到2015年底，中国个人计算机及服务器保有量将分别达到6.3亿台和936万台。数据和经验表明，计算机将会对人类社会产生越来越深刻的影响。

随着计算机技术的发展，计算机的应用也越来越广泛，涉及到国防、能源、石油勘探与开发、科学研究、地球环境、气候和天气预报、航空航天飞行器设计、材料和药物设计、工业制造等众多领域。计算机作为快速发展的产业，依赖于微电子技术和其他更先进的科学技术特别是数学的发展。从长远来看，数学是影响计算机技术发展的关键。同时，计算机反过来也对数学产生了影响，这种影响不仅在于协助数学家完成大规模复杂计算、设计算法、验证猜想及证明定理，而且还提出了一系列理论方面的问题，从而形成了一系列新领域乃至新学科。20世纪90年代以来，由于微电子技术的发展和应用需求的推动，高性能计算机得到了飞速发展，计算机已经成为数学家研究数学、发展数学的有力工具与助手。

冯·诺依曼与计算机的诞生

若谈及一位数学家对社会的贡献和冲击，没有人能与冯·诺依曼相提并论。他没有得过诺贝尔奖，也没有得过菲尔兹奖，但他的贡献即使不是远远超过那些获奖者，至少也不比他们中的任何一位差。他的名声大都来自计算机，被誉为“计算机之父”，其实更准确的说法是“决策科学之父”。正是由于冯·诺依曼的工作，决策理论才建立了起来，并成为一门科学。冯·诺依曼至少在十大领域都做出了划时代的贡献，比如遍历理论、对策论及数理经济学、数值分析等数学领域，为量子力学奠定了数学基础，在自动机理论以及自动推理方面做出了超前的创新，为

计算机的诞生起到了奠基性和决定性的作用，其工作大大推进了计算机在多个方面的应用。

1943 年第一台电子计算机在费城宾夕法尼亚大学开始制造，这就是著名的 ENIAC（埃尼阿克，图 3-23），它本质上是一台电子数值积分计算器（Electronic Numerical Integrator and Computer），冯·诺依曼加入了该项工程的研发。当时的国际环境是，第二次世界大战激战正酣，研制和开发新型武器的需求显得十分必要与迫切。为此美军在马里兰州的阿伯丁设立了"弹道研究实验室"。美国军方要求该实验室每天提供 6 张火力表以便对导弹的研制进行技术鉴定，而每张火力表都要计算几百条弹道，每条弹道的数学模型都是一组非常复杂的非线性方程组。此类方程组大部分是无法求出解析解的，所以一般情况下只能用数值方法近似地算出数值解。原本的 ENIAC 存在两个问题——没有存储器且用布线接板进行控制，严重影响了计算的速度。



图 3-23 世界上第一台电子计算机 ENIAC 是一个庞然大物，占地面积为 170 平方米，总重量达30 吨。机器中约有 18 800 只电子管、1 500 个继电器、70 000 只电阻以及其他各种电气元件，总功率约为 140 千瓦。这样一台"巨大"的计算机每秒可以进行 5 000 次加减运算，相当于手工计算的 20 万倍，继电式计算机的 1 000 倍

1945 年，冯·诺依曼发表了一份长达 101 页的报告——《关于 EDVAC 的报告草案》，详细总结和说明了 EDVAC 的逻辑设计，提出了一直延续至今的电子计算机的体系结构——冯·诺伊曼结构。EDVAC（Electronic Discrete Variable Automatic Computer）即离散变量自动电子计算机，是一种"存储程序通用电子计算机方案"。他给出的主要设计思路是：计算机由五部分组成，即计算器、控制器、

存储器、输入和输出设备，如图 3-24 所示。他还描述了这五部分的职能与相互关系，并对 EDVAC 的两大设计思想做了进一步的论证，为计算机的设计奠定了理论基础。

冯・诺依曼的第一个设计思想是二进制，他根据电子元件工作的特点，建议在电子计算机中采用二进制。他不仅提到了二进制的优点，还预言二进制的采用将大大简化机器的逻辑线路。另一个设计思想就是计算机要采取存储程序。但这台计算机长期停留在纸面上，直到 1952 年才正式建成。

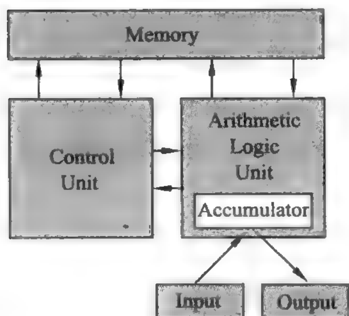
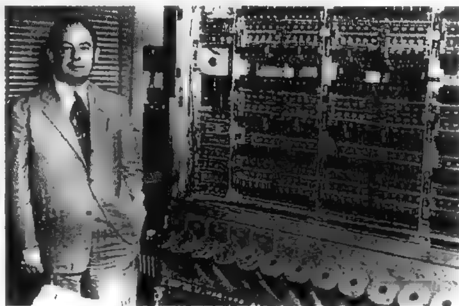


图 3-24　1945 年冯・诺依曼提出的计算机的五部分结构

1946 年冯・诺依曼回到普林斯顿高等研究院，并开始研制“完全自动通用数字电子计算机”，这台现代通用计算机的原型机以高等研究院的缩写 IAS 命名(图 3-25)。同一年，他和哥德斯坦(H. Goldstine，1913—2004)发明了所谓的“流程图”，并采用一些子程序和自动编程的方法将程序员的语言翻译成机器语言，大大简化了程序员编程的步骤。

本来建造计算机是为了计算弹道，但当第一台电子计算机问世时，战争已经结束。冯・诺依曼以其非凡的远见卓识，为计算机找到了新的用场——数值天气预报。1946 年他一回到普林斯顿，就把数值天气预报作为考验电子计算机的头号课题。天气预报的基本方程组是流体动力学方程组，其解析解无法求得，而只能求得其数值解，在这方面计算机大有用武之地。

其实，早在 20 世纪 20 年代，英国数学家理查德逊就已经提出了一个合理的数学模型，但由于计算速度太慢，天气的预报延后了 2～3 天，以致于没有实用性。从现代计算机与数学发展的角度看，天气预报必将使大规模科学计算的问题暴露出来，从而促使数学家们建立有效的数值解法和数值分析方法。


图 3-25　冯・诺依曼和第一台现代通用计算机的原型机 IAS

在计算过程中，最重要的问题是误差的来源以及误差的传递造成的计算的不稳定性，误差可能被放大到与数据相同的量级，使得计算及其结果没有任何意义。比如大量多次计算后，舍入误差的积累对结果精确度的影响可能很大。

考虑到这一点，为计算机设计的算法必须具有数值计算上的稳定性。1946

年，冯·诺依曼和伯格曼以及蒙哥马利为美国海军部撰写了一个报告《高阶线性方程组求解》。1947年，冯·诺依曼和哥德斯坦发表了《高阶矩阵数值求逆》，首先对线性方程组高斯消去法进行误差分析。同年，美国国家标准局建立国家应用数学实验室，并建立了数值分析研究所，这表明数值分析脱离了传统的数学分析而成为独立的分支。尽管在此之前已产生了一系列的计算方法（如有限差分法、黎兹方法等），但此后特别着重于一个方法的计算机运行和检验，其中冯·诺依曼的工作为科学与工程计算奠定了基础。

π究竟是多少

曾几何时，数学家的主要工作被认为是计算，当然除了数值计算，还可能包括符号运算和代数运算。19世纪中叶之前的数学大家一般都是计算高手，比如欧拉和高斯，一生很大一部分精力和时间都在进行数值计算及计算方法的改进。欧拉的记忆力和心算能力是罕见的：他的两个学生把一个复杂的收敛级数的17项加起来，算到第50位数字，两人相差一位数字，欧拉为了确定究竟谁对，用心算进行全部运算，最后把错误找了出来。

虽然后来数值计算的任务已经落在从事应用数学的科学家身上，但至今仍有许多人抱有上述看法，提起数学家的第一反应就是能算和会算，甚至把运算速度作为衡量数学家能力的标准。这当然是不科学的，甚至很可能沦为一个笑话。不过，电子计算机的问世，确实对数学的影响很大，甚至对数学家是一个冲击。有了计算机，人们就能以过往任何时候的数学家都达不到的速度、规模和复杂程度进行数值运算。

历史上，数学中最重要的数之一是圆周率π。在很长时间内，π的数值是判断计算技术的一个标准。为此，数学家发明了许多公式来计算圆周率π，这些都直接或间接推动了数学的发展。比如我国古代数学家刘徽曾计算得到$\pi=\frac{3\,927}{1\,250}=3.141\,6$，称为“徽率”。南北朝时期著名数学家祖冲之用刘徽割圆术计算11次，根据圆内接12 288边形得出圆周率π的值在3.141 592 5和3.141 592 6之间，成为此后千年世界上最准确的圆周率。

π的值到了19世纪中叶才计算到小数点后面400位的准确数值。1949年人们开始用计算机计算π的数值，计算结果很快就突破了2 000位。有了计算机这个强有力的工具，π的准确位数迅速扩展着，10年后就已经扩展到了10万位，20年后扩展到100万位。2010年8月，日本男子近藤茂利用自己组装的硬盘容量

达32TB的计算机，计算出圆周率小数点后5万亿位。2011年10月19日，日本一位程序员宣布他已经将圆周率计算到小数点后10万亿位。

当然π的计算只不过是电子计算机的牛刀小试。从计算机一问世，计算机的先驱们就已经意识到过去大量无法实现的计算，特别是非线性的、复杂的、高阶的问题都可以通过计算机来解决。正是这些数学问题的解决，导致了一系列的重要应用，比如天气预报、大型建筑的工程设计、飞机和汽车以及各种尖端武器的设计和制造等。这些数值计算为数学提出了一系列新问题，并由此产生了许多新的学科分支。首先是前面提到的数值分析，由于用计算机进行的数值计算几乎都是近似计算，所以必须考虑误差、收敛性、稳定性等一系列问题，对误差在复杂计算过程中的传递也要考虑。其次为了适应在计算机上进行数值计算，除了适当改进已有的算法，比如有限差分法、高斯消去法等，还要创造、发展一系列新的算法，比如解线性规划问题的单纯形法、解高阶线性方程组的稀疏矩阵法、快速傅立叶变换法、有限元法以及蒙特卡罗法，等等。我国著名数学家冯康（图3-26）对有限元法等作出了重大贡献。



图3-26　我国著名数学家冯康（1920—1993），中国现代计算数学研究的开拓者，独立创造了有限元方法、自然归化和自然边界元方法，开辟了辛几何和辛格式研究新领域，为组建和指导我国计算数学队伍做出了重大贡献

除了要求计算机能够进行数值计算之外，数学家还逐渐要求计算机也能进行符号演算乃至代数运算。由此在20世纪60年代后逐渐产生了计算机代数这门学科，一批计算机软件问世，并在各个领域得到了广泛的应用。现在最广为人知的恐怕要数Wolfram Research出品的Mathematica与Maplesoft出品的Maple了，这两家巨型的商业公司都提供丰富的数学类资源，比如大名鼎鼎的MathWorld。

另外，计算机算法程序使得计算机的应用远远超出了数论和代数的范围，计算几何学、计算生物学、计算物理学等边缘交叉学科如雨后春笋般不断涌现。这些学科和领域都是基于计算机，利用现代电子计算机的大存储量和快速计算的有利条件，通过计算、模拟等现代手段解决相应领域的问题。

下一个梅森素数在哪里

数学中有大量的问题是以猜想形式表述的，比如众所周知的哥德巴赫猜想。这些猜想涉及无穷多个数，所以靠逐一列举是无法验证的。即便是有限的问题，数目太大也是一个巨大的障碍，这就需要数学的证明。那么计算机能提供什么帮助呢？从正面讲，计算机在一定程度上帮助数学家从各种角度进行验证，这样可以增加信心，也可以摸索出一个规律；从反面讲，一旦猜想不对，在验证过程中总可以找到反例，这就推翻了猜想。对于数学家来说，推翻猜想也算是解决了问题，否则在知道反例之前，数学家往往会徒劳地去寻找猜想的证明。在这方面计算机的作用是不可低估的，通过计算机已经得到许多数论结果，形成了计算数论这门学科。计算数论的一个基本问题就是素数的验证及合数的因子分解。这些问题虽然在数学理论上得到了解决，但是一个几百位的数字的素因子分解仍然远非人力所能解决。比如费马数 $F_n=2^{2^n}+1$ 是否为素数。1640 年费马曾猜想：所有的费马数均为素数。但 1732 年欧拉证明 $F_5=2^{2^5}+1=2^{32}+1=641\times 6\,700\,417$，从而推翻了费马的猜想。

另一种特殊的数是梅森数 $M_p=2^p-1$，其中 p 是素数，如果 M_p 是素数，则将其称作梅森素数。17 世纪法国著名数学家梅森曾对 2^p-1 型素数作过较为系统而深入的探究，并提出著名的梅森猜想：当 p 是素数时，M_p 是素数。

电子计算机的发明革命化地改进了梅森素数的寻找。第一个成功的例子是 M_{521} 的发现，它是在莱默（D. Lehmer，1905－1991）指导下，使用罗宾逊（R. M. Robinson，1911－2005）教授编写的软件，利用洛杉矶加利福尼亚大学的数据分析协会的计算机于 1952 年 1 月 30 日 22：00 获得的。在随后不到两小时，下一个梅森素数 M_{607} 被发现。在随后的几个月里，使用同样的程序发现了另外三个梅森素数 $M_{1\,279}$，$M_{2\,203}$ 和 $M_{2\,281}$。

2008 年 8 月 23 日，美国加州大学洛杉矶分校计算机专家埃德森・史密斯借助计算机发现了第 45 个梅森素数 $M_{43\,112\,609}=2^{43\,112\,609}-1$，此数有 12 978 189 位长。

为了激励人们寻找梅森素数，设在美国的电子新领域基金会（EFF）曾宣布为探寻梅森素数而设立奖金。它规定向第一个找到超过 1 000 万位梅森素数的个人或机构颁发 10 万美元。后面的奖金依次为：超过 1 亿位数 15 万美元，超过 10 亿位数 25 万美元。由于史密斯发现的梅森素数已超过 1 000 万位，他获得了 EFF 颁发的 10 万美元大奖。

从 1997 年至今，所有新的梅森素数都是由互联网梅森素数大搜索（GIMPS）

分布式计算项目发现的。截至 2014 年 2 月，已知的梅森素数共有 48 个。已知最大的梅森素数是 $2^{57\,885\,161}-1$。

搜索新的发现不仅限于代数与数论，而且也涉及到了几何学，特别是给出直观的几何对象。1985 年左右数学家藉由计算机发现了新型的极小曲面，其实就是肥皂膜。2007 年 3 月 19 日美国麻省理工学院(MIT)数学教授 David Vogan 宣布，一个由 18 位数学家组成的国际专家组利用功能强大的超级计算机绘制出了 E_8 的结构图。这一成果可谓“数学中的人类基因组计划”，有望促使几何学、数论和弦理论等众多领域产生突破性进展。

数学中，李群是具有群结构的流形或者复流形，并且群中的加法运算和逆元运算是流形中的解析映射。李群在数学分析、几何和物理中都有非常重要的作用，它以索菲斯·李命名。E_8 是李群中举的一个例子，我们熟悉的球、圆柱体和圆锥是 3 维对称物体，而 E_8 则是 248 维对称体(图 3-27)。

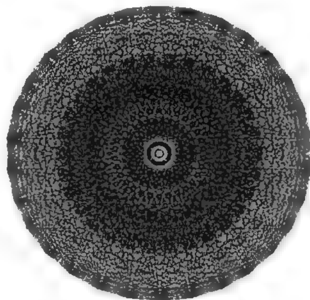


图 3-27　E_8 的根系统图之一，由 8 维空间里的 240 个向量组成

李群是对连续对称物体的数学描述，这些物体包括圆锥、球体和它们在更高维度上的形式。数学家们很好地了解了李群中的许多形式，但 E_8 是其中最复杂的一种。正方形的对称很容易理解，沿着对角线或者对边中点连线都能实现正方形的对称。这些对称形成了一个李群，它仅包括拥有 2 个自由维度的成员。相应地，球体的表面是 2 维连续对称的，因为它只有两个方向的坐标(如地球的经度和纬度)。但对于空间来说，它能沿着 3 个轴(x 轴、y 轴、z 轴)旋转，因此其李群是 3 维的。然而，我们无法继续这样用大脑想象出 E_8 的结构，因为这种对称代表的是 57 维的物体，而相应的李群则是异常庞大的 248 维。

正是由于这种超常的规模和复杂程度，完成计算 E_8 的工作最终花费了超级计算机塞奇(Sage)77 个小时，产生的文件数据有 60GB，而人类基因组计划还不到 1GB。如果把计算结果以小字体写在纸上，将能铺满美国纽约的曼哈顿岛。似乎一般家庭电脑的硬盘能够存储这些数据，但是要获得这些数据，电脑的内存要有几十个 GB，这远远超出了一般家用电脑的配置。

该运算过程非常复杂，需要计算机专家们拥有广泛的经验，既能够开发新的数学技术，又能够开发新的编程方法。尽管在运算过程中出现了无数的软件和硬件问题，整个计算过程最终还是于 2007 年 1 月 8 日早上 9 点完成。

地图的印刷需要几种颜色

1852年毕业于伦敦大学的格斯里(F. Guthrie,1831—1899)来到一家科研单位搞地图着色工作时,发现每幅地图都可以只用4种颜色着色(图3-28)。这个现象能不能从数学上加以严格证明呢?他和他正在读大学的弟弟决心试一试,但是稿纸堆了一大叠,研究工作也没有任何进展。1852年10月23日,他的弟弟就这个问题的证明请教了他的老师、著名数学家摩根(Augustus de Morgan,1806—1871),摩根只是证明了地图上不存在5个国家彼此都相邻的情况。但是地图所需色数并不等于相邻国家数的最大值,问题还是没有解决。

同年10月23日,摩根为此致信当时顶尖的数学家、物理学家哈密顿(W. R. Hamilton,1805—1865),然而得到的答复却是对方对染色问题“不感兴趣”。之后,为引起其他数学家的关注,摩根开始用各种方式传播四色问题。

除摩根外,英国数学家凯莱(A. Cayley,1821—1895)对四色问题的传播也做出了巨大贡献。1878年6月13日,他在伦敦数学会上当场发问是否有人证明了四色问题。次年,他还在英国皇家地理学会会报上发表论文,第一次从数学的角度明确陈述了这一猜想,并指出了证明的困难所在,最后他表示“还不能给出证明”。凯莱对四色问题的关注自然也激发了其他人的求解欲望。在那个时候,一种普遍的观点是四色问题应该不会太难,或许很快就能解决。然而,事实证明并非如此。

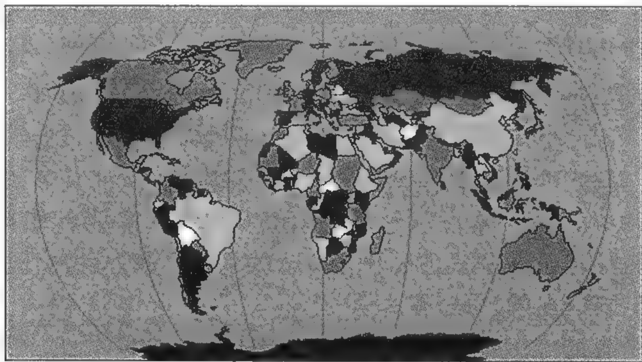


图3-28 用4种颜色即可为世界地图着色。问题是:是否任意的地图都可以只用4种颜色就能完全着色?

1878～1880年间,著名的律师兼数学家肯普(Alfred Kempe,1849—1922)和泰特(Peter Guthrie Tait)两人分别提交了证明四色猜想的论文,宣布证明了四色猜想。大家都认为四色猜想从此也就解决了,但其实他俩谁也没有证明四色

猜想。

四色问题的难点之一是涉及无穷:研究对象有无穷多个任意的地图。利用欧拉公式,肯普证明任意地图都伴随有一个至少需要同样多颜色的"正规地图",于是,问题就变成对"正规地图"证明四色足够。在一幅地图中,如果没有任何一个国家包围其他国家,或没有三个以上的国家相遇于一点,这种地图就被称作"正规地图"。尽管如此,还是无法避免无穷多的困扰。对此,肯普使用了归谬法:先假设存在需 5 种颜色才能染色的正规地图,然后寻找矛盾,从而证明四色足够。

1890 年,在牛津大学就读的年仅 29 岁的赫伍德(P. Heawood, 1861—1955)以自己的精确计算指出了肯普在证明上的漏洞。不久泰特的证明也被人们否定了。人们发现他们实际上证明了一个较弱的命题——五色定理。就是说对地图着色,用五种颜色就足够了。

19 世纪末是四色问题发展的一个分水岭。肯普虽然未能成功,但他的证明路线为后人指明了方向。肯普引入了两个概念:不可避免性和可约性。不可避免性是指任意的正规地图至少有一国具有 2,3,4 或 5 个邻国,也就是说,2 个、3 个、4 个和 5 个邻国的"构形"是不可避免的。而可约性是指从正规地图中移去某个子图,如果所得新图的可四色性蕴含着原图的可四色性,这样的正规地图就称为可约的,被移去的子图就叫作可约构形。

1913 年美国数学家伯克霍夫(G. D. Birkhoff,1884—1944)发现了大量新的可约构形,比肯普所发现的要多得多。而德国数学家希什(H. Heesch, 1906—1995)则在 1950 年证明可以找到一组不可避免集,其个数上限大约为 1 万。同时希什还是第一个用计算机研究四色问题的数学家。

1976 年阿佩尔(K. Appel,1932—2013)和哈肯(W. Haken,1928—)合作利用计算机找到了 1 936 个构形的不可避免集。他们一方面修改已有的可约性程序,一方面利用更一般性的约减步骤改进程序,最终在 IBM 360 计算机上耗费 1 200 个机时验证了构形的可约性。1976 年 6 月他们在《美国数学会通讯》上发表文章宣称证明了四色定理。许多著名报刊立即转载了这个爆炸性的消息,比如《时代周刊》、《泰晤士报》、《纽约时报》等。

阿佩尔和哈肯的工作的意义已经超越了证明数学难题本身,告诉人们计算机不仅可以用来计算,还可以用于数学的逻辑证明。不过,他们的方法本质上是一种穷举检验法。这种史无前例的使用计算机辅助证明的做法成为了关注的焦点,并引起了不小的争议。有哲学家质疑说:用计算机辅助证明的细节隐藏在计算机内,没有人能对它进行复核。而如果数学允许使用计算机进行"实验",则数学将会走向经验科学。如果承认了这种证明的有效性,则计算机实验将被视为确定数

学结论的一种新的方法。这种争议直接导致数学家和科学家分成了两大派：支持者接受计算机向数学领域提供的巨大帮助，怀疑论者则反对用计算机辅助证明。

1994年数学家西缪尔在瑞士苏黎世的国际数学家大会上宣布修正了阿佩尔和哈肯的证明。在经过长时间的检验、论证和修正之后，西缪尔等人的文章于1997年发表，无论是论文的篇幅，还是计算机的检验时间，西缪尔的工作都简洁了很多，他们设计的计算机检验程序只需要5分钟就能完成。他们的证明尽管也需要用到计算机，但每一步都可以转换成人可以理解的证明。

2005年英国剑桥研究院研究员贡蒂埃成功给出了四色定理的新的证明，常被称作四色定理的第三代证明，而阿佩尔和哈肯的证明被称作第一代证明，西缪尔的证明则被称作第二代证明。

从实质上来讲，第三代证明并非数学证明，而是所谓的形式证明。对于一个定理，有了形式证明同有了数学证明一样。一个有形式证明的定理必定是建立在更广意义的数学证明基础上的。形式证明就是将所有逻辑步骤都写出来，并通过推理规则来证明。除了通常证明中的概念、定义和推导，形式证明还包括符号串、构成规则、推演规则以及逻辑公理。

贡蒂埃的思路主要分两部分：先写下西缪尔证明的形式部分，再写下另一个不同程序来验证上述证明是正确的。2005年3月贡蒂埃给出了这样一个形式证明：根据西缪尔等人的证明，设计一个新的证明程序，用Coq(一个交互式的定理证明辅助工具)完全验证该程序的正确性。

如今，四色猜想已经成为了定理。对于数学问题本身，数学家感兴趣的主要是技术及方法。但从知识创新的高度来看，数学家更关注问题的来源、数学方法特别是数学证明的实质以及数学问题在解决过程中带来的后果。像四色定理这种问题，解决问题当然重要，但除此之外，提出问题和对数学证明的理解也是十分重要的。

从数学定理的机械证明到数学机械化

从很早开始，计算和证明就已经成为数学家日常工作的主要内容。对于计算机来说，计算当然不在话下，但是证明定理就不那么简单了。从20世纪50年代开始，数学家开始尝试用计算机证明定理。1959年数学家王浩只用了9分钟的机器时间就证明了英国数学家罗素的名著《数学原理》中的350条定理，在当时引起了轰动，通常数学上将这一年称作机器证明的元年。

第一个靠计算机帮助才得到证明的定理是前述的四色定理，这就对数学提出了新问题：是否有些定理超了人的手工证明能力？当时的许多大数学家并不把计

算机的辅助证明当回事，他们认为一些特殊定理的证明并不能给出系统的方法。因此长期以来，机器证明并未能取得很大突破。

真正在机械化证明上取得突破的是我国著名数学家吴文俊教授，他从 1976 年开始研究数学的机械化证明，并于 1977 年建立了吴方法，对初等几何定理实现了机械化证明，不仅证明了几百条过去已知的定理，而且还得到了一些新定理。1978 年，吴文俊开始对微分几何定理实行机械化证明。

现在流行的自动推理方法可分为三类：以埃尔布朗理论及解法为代表的逻辑方法，以纽厄尔、西蒙为代表的人工智能方法，以塔斯基与吴文俊为代表的代数方法。经过多年的努力，以吴文俊 1986 年提出的吴-Ritt 零点分解定理为核心的构造性代数几何理论已经成为机械化数学的重要理论基础，不仅在几何定理的机器证明、方程组求解、微分几何、理论物理、力学等领域得到成功应用，还成为机器人学、数控技术、CAD、计算机视觉等高科技领域的有力工具。由他建立和发展起来的数学机械化的理论和方法对整个数学的发展乃至科学的进步发挥了越来越大的作用，自动推理界对此有极高的评价。

研究工具的革新，极大地促进了科学的进步。数学研究工具的变革能够推动数学学科的发展前进，这曾为数学发展的历史所证明，也将为今后数学的发展所证实。然而，工具的革新要有一个过程。数学家若想利用计算机进行数学研究，就需要把实践中产生的各类问题，以计算机易于接受的形式恰当地提出，并“教会”计算机如何去做，即提供相应的算法和计算机程序。如果这种算法是创造性的，则需要相应的数学理论作为支撑，以保证算法的正确性以及可行性。这将引发一系列新的数学概念的建立，并促使一些沉寂着的已有概念的复苏，以至于创立全新的数学理论。如果这种数学算法是有效的，则将为数学工作者带来极大的便利，使他们敢于问津前人望而却步的数学问题，使得他们能够大踏步进入前人未曾涉足的研究领域，使一些令人棘手的问题获得解决。

吴文俊院士（图 3-29），1919 出生，我国著名数学家，在拓扑学的示性类和示嵌类、数学机械化等领域中作出了重要贡献，由于在数学机械化方面的卓越贡献而获得了 1997 年度的埃尔布朗自动推理杰出成就奖（图 3-30）。


图 3-29 吴文俊（1919— ）

吴文俊的方法真正为数学机械化开辟了一个新的方向。值得注意的是，与过去的方法相比，吴方法的优越性在于它能实实在在给出具体的结果，为实现整个计算机械化开辟了一条切实可行的道路。吴文俊提出的数学机械化的方案，在不长

时间内就取得了一系列重大成果，比如实现了由开普勒定律推出牛顿万有引力定律的自动推导等。这表明数学机械化有巨大潜力，许多常规的事情可以交给计算机去做，人只需要去进行创造性劳动，这是一个实现脑力劳动机械化的宏伟纲领。

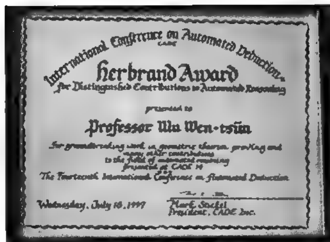


图 3-30　由于在数学机械化方面的卓越贡献，吴文俊获得了 1997 年度的埃尔布朗自动推理杰出成就奖

对此，吴文俊教授在 1978 年曾高瞻远瞩地写道：

计算机对数学的另一个重大作用，乃是对数学研究作为脑力劳动在方式上的革新。数学，不论是学习还是创新，最耗时费力的劳动，往往消耗在定理证明上，而不是在真理的发现上……电子计算机可以使人们从某些逻辑推理的脑力劳动中解放出来。因而使数学家，得以把聪明才智，更多地用到真正创造性的工作中去，这是当前数学发展中，值得也是应该认真考虑的问题。

七、中国近现代数学教育



中国近现代数学教育起步于清朝末年，它并不是对传统数学教育体制的简单继承，而是经过跨越式发展建立起来的一种全新体制。在当时，已经实行了1 300多年的科举制度以培养官僚士绅为教育的主要目的，这成为束缚科学技术发展的桎梏，从14世纪开始，中国数学的发展基本处于停滞状态。在清末"洋务运动"中，教育开始注重实用人才的培养。经过了20世纪初留学生的大规模归国之后，西方的先进数学知识和教育体制被移植过来，经过本土化的融会贯通，形成了全新的中国现代数学教育体制。

清末的蹒跚起步

在东西方文化交流的早期，基督教传教士扮演了重要角色。中国第一次接触到西方的数学思想，源自于明末徐光启(1562—1633)和意大利传教士利玛窦(M. Ricci,1522—1610)在1607年合译的欧几里得《几何原本》前6卷。在这部书中，为了把西方的数学概念用中文准确表达，徐光启呕心沥血反复推敲，最终把译著命名为易懂的《几何原本》，并定义出"平行线"、"三角形"、"对角"、"直角"、"锐角"、"钝角"、"相似"等中文术语，一直沿用至今。在康熙末年，由于罗马教廷与中国朝廷的政治冲突，基督教在中国被限禁，中西方的科学交流也陷入沉寂。直到1856年，《几何原本》的后9卷才由李善兰与英国传教士伟烈亚力(A. Wylie,1815—1887)合译完成。

1. 新式学堂的出现

到了清末，数学教育开始引起清政府和精英阶层的空前重视，他们已经意识到为了达到富国强兵的目的，除了学习制造技术之外，还必须掌握先进的基础理论，数学尤其显得重要，而数学教育则要超出服务于日常生活和经济生活的传统范畴。为了引进西方先进的数学知识，首先开展了对国外教科书的大规模翻译。以上海墨海书馆为例，作为成立最早的一家现代出版社，出版了李善兰和伟烈亚力等人先后翻译完成的欧几里得《几何原本》后9卷、《重学》20卷、《谈天》18卷、

《代数学》13 卷、《代微积拾级》18 卷、《植物学》8 卷、《奈端数理》(即牛顿《自然哲学的数学原理》)等几十种教材。

在两次鸦片战争之后,闭关自守的清政府被迫走上了国际交往的舞台,不得不面对越来越多的对外交涉。为了培养翻译人才,清政府在 1862 年创办了近代中国第一所外语学校——京师同文馆。随后,汲取战争失败的痛苦教训,为了学习西方"制器之根本",1866 年京师同文馆增设天文算学馆,迈出了中国近代科学教育的第一步。

天文算学馆用英语教授科学课程,除聘请李善兰为总教习之外,师资基本为西方人,采取了完善课程设置、学用相长、以考促学等措施。在学生完成两年的语言学习之后,开设了数学、物理学、化学、天文学、医学生理、机器制造、矿务、国际法等实用专业,京师同文馆也由此发展为一所具有近代高等教育性质的技术学堂。天文算学馆的数学课程由李善兰亲自讲授,设代数、几何、平面和球面三角、微积分等课程,这是向中国学生较系统地传授西方高等数学基础知识的开始。

李善兰(1811—1882,图 3-31),原名李心兰,字竟芳,号秋纫,别号壬叔,浙江海宁人,是中国近代著名的数学、天文学、力学和植物学家。李善兰自幼资禀颖异,少年时自学完《九章算术》和欧几里得《几何原本》前 6 卷之后,开始迷上了数学。在几次参加科举考试不中之后,李善兰完全转向于数学的研究和教育工作。



图 3-31 李善兰

李善兰在数学研究方面的成就,主要有尖锥术、垛积术和素数论三项。尖锥术发表时间约为 1845 年,李善兰通过创立"尖锥"概念,得到一种处理代数问题的几何模型,而"尖锥求积术"的实质是二次平方根的幂级数展开式,由此得到了 π 的无穷级数表达式、各种三角函数和反三角函数的展开式,以及对数函数的展开式,这是 19 世纪中国数学界最重大的成就。垛积术使用了微积分方法处理离散数学问题,得到著名的"李善兰恒等式"。素数论主要发表于 1872 年,在判别一个自然数是否为素数时,李善兰证明了著名的费马素数定理,并指出了它的逆定理不真。

李善兰翻译了大量西方近代科学著述。1852—1859 年间,李善兰先后与人合译出版了《几何原本》后 9 卷、《代数学》、《代微积拾级》、《谈天》、《重学》、《圆锥曲线说》、《植物学》,以及《奈端数理》(即牛顿《自然哲学的数学原理》),这是解析几何、微积分、哥白尼日心说、牛顿力学、近代植物学传入中国的开端。李善兰的

翻译工作匠心独运，创译了许多贴切的中文科学名词，如"代数"、"函数"、"方程式"、"微分"、"积分"、"级数"、"植物"、"细胞"等，沿用至今。

1868年，李善兰被荐任为北京同文馆天文算学总教习，直至1882年他逝世为止，从事数学教育十余年。其间审定了《同文馆算学课艺》等数学教材，培养了一大批数学人才。李善兰在传播近代数学知识方面所起的重要作用，使他成为中国近代数学教育的鼻祖。

19世纪末叶，随着洋务运动的兴起，出现了武汉自强学堂、天津北洋西学学堂、山西大学堂、上海南洋公学、四川中西学堂等一批具备现代形态的新式高等学校。其中，作为戊戌变法新政之一的京师大学堂最为著名。1898年，京师大学堂正式成立，把"中学为体，西学为用，中西并用，观其会通"确立为办学宗旨。1902年，随着京师同文馆的并入，京师大学堂成为中国近代最早的国立综合性全科大学。京师大学堂的学制仿照西方国家的大学设置，分为预备科（预科）、大学专门分科（大学本科）和大学院（研究生院）三级，设立了经科（传统道德学）、法政科、文科、格致科（物理、化学、地质）、农科、工科（土木、矿冶）、商科共七科多个专业，初等算学和高等算学成为各科的重要课程。

2. 学制改革与留学潮

1904年1月，清政府宣布废除科举制度，公布《奏定学堂章程》，这是中国近代由国家颁布的第一个在全国范围内推行的系统学制，此时为旧历癸卯年，故又称"癸卯学制"。学制规定了学堂的立学宗旨、各级各类学堂的性质任务、入学条件、修业年限及相互衔接和关系。学制主系列划分为初、中、高三段，蒙养院（幼儿园）、初等小学堂、高等小学堂、中学堂、高等学堂（大学预科）、大学堂、通儒院（研究生院）七级，修业时间长达25～26年，兼顾了普及教育、职业教育、专门人才培养以及学术研究各方面的需求。学制对初等数学教育做了规划，小学设算术课；中学设数学课，包括算术、代数、几何、三角、簿记（会计）。

在改革学制的同时，为了近距离汲取西方文明、掌握先进技术，从1870年起，清政府开始有计划地向西方各国派出留学生。甲午战争之后，日本国力的快速提升震惊了国人，而且日本路途较近、费用较低、习俗文字相通，因此向日本广派留学生被视为培养人才的捷径。在清政府的大力倡导下，掀起赴日留学的高潮，到1906年最高峰时留日人数达到17 860余人。1909年，为了扩大美国文化对华影响，美国政府决定将庚子赔款的浮溢部分本利退回，充作留美学习基金，并制定了一整套切实、科学的政策招收赴美留学生，被称为"庚子赔款留学生"，随后美国逐渐成为留学人数最多的国家。

留学潮的兴起，对中国学术界产生了深远影响，留学生在20世纪上半叶中国

现代教育制度的建立过程中起到了关键作用。留学生在国外不仅学习到先进知识，而且熟悉了国外的科学、教育组织和制度。随着留学生大规模归国，留学生在教育体制改革中处于决策者和指导者的地位，并且成为新的教育制度的有力践行者。数学学科方面，冯祖荀(官费留日)、胡敦复(官费留美)、胡明复(庚款留美)、姜立夫(庚款留美)等人开辟了20世纪中国数学教育的新高地。

清末教育体制的改革以及现代数学教育制度的引进，是当时大量有识之士面对国家积贫积弱的现状做出的被动选择。在经历了教科书翻译、新式学校的创建、改革学制、鼓励出国留学几个过程之后，一种现代教育制度的雏形开始呈现出来。

历史没有给清政府留下太多的时间去对现代教育制度进行更多的尝试，1911年辛亥革命爆发，清朝的统治草草收场。清末近代教育制度的建立，饱受传统势力的责难和质疑，注定处于步履蹒跚的局面，尽管如此，仍留下诸多有益遗产：科举制度被彻底废除，新式学堂在全国普遍成立，以京师大学堂为代表的现代大学雏形开始出现，"庚子赔款留学"的启动带动了海外留学的兴起。

现代数学教育的奠基

如果说清末开始对现代教育制度的摸索还是迫于国运日蹇，进入中华民国之后，随着大量留学生回归报效，学术界开始主动寻求建立一种与中国国情相适应的现代教育制度。在这一过程中，数学教育成长为一门独立的学科，同时现代意义的数学研究开始起步，奠定了中国现代数学教育的基础。

1. 民国学制

民国伊始，为了严格教育制度，教育部在1912年(壬子)至1913年(癸丑)制定公布了新的学制，被称为"壬子癸丑学制"。学制规定：初等小学校(4年)为义务教育，毕业后进入高等小学校(3年)或乙种实业学校(3年)；高小毕业后进入中学校(＜4年)、师范学校(本科4年、预科1年)或甲种实业学校(3年)；中学校毕业后进入大学(本科3至4年，预科3年)、专门学校(本科3至4年，预科1年)或高等师范学校(本科3年，预科1年)。除高师外，允许开办私立学校。

1922年，民国政府针对原有学制进行调整，颁发"壬戌学制"，并一直沿用到1949年。学制规定：初等教育6年，其中初级小学4年，高级小学2年；中等教育6年，初级中学、高级中学各为3年，初级中学为普通教育，也可兼设各种职业科，高级中学分为普通、农、工、商、师范、家事等科，师范学校修业年限为6年；高等教育3～6年，其中大学4～6年，专科3年以上；大学院为大学毕业及具有同等程度者的研究单位，即培养研究生的机构，年限不定。

民国学制对小学和中学的课程设置做了具体规定，大学和专科学校的课程则由教育部做出原则规定后由各校自行设立，送教育部核定备案。在数学方面，小学设算术。初级中学设算术、代数、平面几何和三角，教材选用商务印书馆出版的《混合算学教科书》或者中华书局出版的《初级混合数学》。高级中学设平面三角、高中几何、高中代数、平面解析几何，理科高中增设立体解析几何和微积分初步，教材为商务印书馆和中华书局分别出版的《平面三角法》、《高级几何学》、《代数学》、《解析几何学》。大学数学系，要求设立微积分学、微分方程式、函数论、近世代数学、近世几何学、平面及立体解析几何学、概率学及最小二乘法、代数解析及方程式论、变分学、整数论、积分方程式论、理论物理学、星学、物理学实验、数学演习等课程。

民国学制参照了西方现代教育体制，而更加适合中国的社会现状，符合自身教育发展的规律。它的颁布和实施，结束了清末以来教育制度的混乱状态，完成了国民教育向平民教育的转变，标志着中国近代以来的学制体系建设的基本完成。通过民国学制的实施，众多杰出人物和实用人才被培养出来。

2. 高等数学教育的起步

中华民国建立以后，随着大量留学生陆续回国，学术界对数学的价值有了新的认识，“数学既是自然科学的基础，又会在社会科学中得到广泛应用”成为普遍共识，新的高等数学教育格局开始形成。

1912 年，京师大学堂更名为北京大学。1913 年秋，在留日归国的冯祖荀(1880—1940，图 3-32)主持下，首创数学门并开始招收新生，标志着我国现代第一个大学数学系正式开始了教学活动。蔡元培(1868—1940)就任北京大学校长之后，积极提倡思想自由，努力培养学术风气，健全了教学、科研制度。蔡元培曾经说过：“大学宗旨，凡治哲学、文学、应用科学者，都要从纯粹科学入手；治纯粹科学者，都要从数学入手，所以各系秩序，列数学系为第一系。”1919 年，数学门正式改为数学系，并在当年的评议中，被列为北大第一系。



图 3-32　冯祖荀

冯祖荀在主持北大数学系期间，初步探索出一套中国现代大学数学系的办学模式。他在课程设置上力求完善，主要课程有：解析几何(立体)、微积分、物理与物理实验、化学与化学实验、函数论、微分方程与调和函数、近世代数、近世几何、理论物理、群论、数论、数学史和外语等，后来又陆续增设了天文学、高等平面曲线、微分几何、积分方程、集合论、变分法、无穷级数、椭圆函数及椭圆模函数等课

程。冯祖荀亲自授课之余，对学术研究也投入了巨大热情。除了自己发表《以图象研究三次方程之根之性质》、《论模替换式之母》、《柯西(Cauchy)氏积分公式之新证法》、《微分方程式论》等论文和著述之外，还鼓励学生积极参加学术活动，在他的支持下，北京大学学生成立“数理学会”，并出版《数理杂志》。为了活跃气氛，冯祖荀大力促进教学改革和国际学术交流，数学系先后邀请德国的施佩纳(E. Sperner)和美国的奥斯古德(W. F. Osgood)来系任教，并邀请德国的布拉施克(W. Blaschke)和美国的伯克霍夫(G. D. Birkhoff)来校讲学。

1920年，姜立夫在南开大学创办了中国第二个数学系。在建系之初的4年中，只有姜立夫一名教授，在身兼行政事务的同时，亲自开设多门课程，除了高等微积分、空间解析几何、射影几何、复变函数论、高等代数、n维空间几何、微分几何、非欧几何等数学专业课之外，还要承担理学院的微积分等公共数学课。这时的南开大学数学系虽然是名副其实的“一人系”，但由于姜立夫中西兼修，有较高的科学素养和渊博的学识，故而教学质量很高，在他的辛勤耕耘下，培养出刘晋年、江泽涵、申又枨、吴大任、陈省身、孙本旺等优秀数学家。

姜立夫(1890—1978，图3-33)，浙江平阳县人，中国20世纪最杰出的数学家和数学教育家之一。姜立夫少年时聪颖过人，入读新式学堂——杭州高等学堂，1910年考取第三批庚子赔款留学生。1911年赴美，先后在加州大学伯克利分校和哈佛大学专攻数学，获得学士学位和博士学位。1920年，赴南开大学创办数学系，任系主任。1926年，赴厦门大学任教一年，厦大数学系风气为之一新。抗日战争期间，南下任西南联合大学教授。参与组建中国数学会，并在1940年任中国数学会会长。1942年负责筹建国立中央研究院数学研究所，并在1947年担任首任所长、研究员。1949年携数学所图书设备迁往台湾，同年返回大陆，在岭南大学创办数学系，任系主任。1952年以后，在中山大学执教终身。



图3-33 姜立夫

姜立夫把毕生主要精力都倾注于数学教育事业，他的教学逻辑推理严密，对教授内容驾驭能力很强，授讲课时只写提纲，论证严谨，说理透彻，带动学生同步进行逻辑思维，得到严格的解决问题的训练。姜立夫的学术生涯开始于综合几何的研究，完成了论文《圆素和球素几何的矩阵理论》，逐步整理出一套以二阶对称方阵作为圆的坐标，以二阶埃尔米特方阵作为球的坐标的新方法。姜立夫对后辈的奖掖不遗余力，华罗庚、苏步青都曾身受他的大力拔擢。姜立夫还长期从事数

学名词的整理与审定，编译大量国外优秀教材和专著，并搜集、保存了完整的数学图书文献，对我国现代数学的教学和科研的发展，产生了巨大影响。

姜立夫长期从事中国数学教育与研究事业的开创和领导工作，为中国现代数学事业做出了广泛而卓越的贡献。

在 20 世纪 20 年代，先后又有多所大学建立独立的数学系，包括东南大学(1921，熊庆来主持)、北京师范大学(1922，冯祖荀主持)、武汉大学(1922，黄际遇主持)、厦门大学(1922)、中山大学(1924，何鲁主持)、燕京大学(1927，陈在新主持)、清华大学(1927，郑之蕃主持)、交通大学(1927，朱言钧主持)、浙江大学(1928，钱宝琮主持)和暨南大学(1929，陈荩民主持)等。此后，几乎所有的综合大学、师范院校和设有理科的高等学校，以及新成立的院校，都陆续成立数学系。

各大学数学系初建时期，主要授课教师多半是归国留学生。使用的教材，除少数自编者之外，大部分选用国外原版的优秀教材或其中译本。课程的设置，基本是照搬移植西方的体制。数学系学生，每校每年级一般都只有少数几个人，做到了少而精。从总体来看，高等院校的数学教育已经与西方国家接轨，教学水平较高。但受到教学经验和教师个人能力的限制，各校的教学质量有较大差异。针对这种局面，教育部对数学专业的必修课做出了原则规定，高等数学教育逐步走向完善。

民国时期数学教育的成就

进入 20 世纪 30 年代，国内政局相对稳定，政府对发展教育事业投入巨大精力，高等数学教育的发展进入了一个新的时期。到 1949 年，中国数学学科建设已经具备一定规模，在人才培养、研究体制、学术成果几方面均取得相当成就。

1. 完善高等教育体制

随着对基础学科的重视，20 世纪 30 年代以后，大学数学系规模迅速扩大，设立数学系的高校不断增加，在校的学生和教师人数大幅度提升。到 1932 年，全国数学系在校学生 709 人，而之前历年毕业总人数仅为 401 人。到 1936 年 1 月，全国共有 34 所大学设立了数学系(算学系)，这年毕业生总人数为 181 人。

由于留学生，尤其是高学历的留学生回国人数的增多，高校数学系的师资力量普遍加强。到 1942 年，大学数学系的教授中，留学生的比例占到 85%以上，归国留学生成为高校数学教师队伍的中坚力量。这个时期，大学教师有着良好的待遇，1932～1937 年，清华大学教授的月薪可达 500 块银元，已经和政府部长的收入相当，而这时维持中等水平的个人生活每月仅需 10 块银元。大学教师的优厚待遇，体现了社会对数学教育的重视和对数学家地位的承认，对稳定数学教育和

科研队伍，唤起从事数学事业的热情起了重要作用。

大学数学系建立初期，由各校自行制订教学计划，没有统一的课程设置和教材选择标准，造成各校教学质量参差不齐。1938 年，教育部组织起草大学课程及设备标准，以“规定统一标准”、“注重基本训练”、“注重精要科目”为原则，于 1939 年公布，当年 9 月开始实施。新的大学数学系课程设置，分为理学院共同必修科目、数学系必修科目、数学系选修科目三种，见下表：

课程分类	主要科目
理学院共同必修科目	国文，外语，高等数学、微积分学任选一种，中国通史，社会科学，自然科学：物理学、化学、生物学、地质学任选二种
数学系必修科目	微分方程，方程式论，射影几何学，高等分析或高等微积分学，高等解析几何学，近世代数学，复变数函数论，微分几何学，理论力学，第二外语，毕业论文或研究报告
数学系选修科目	数论，投影几何学，概率，向量分析，天文学，非欧几何学，级数论，群论，统计学，实变数函数论，微分方程式论，偏微分方程式论，变分学，椭圆函数论，形式几何学，波动力学，数学物理，数学史

关于教材，由于之前多选用国外原版教材，水平固然不低，但也带来了教者必先逐句讲解外文，学者必先在外语上花费大量精力的弊端，在一定程度上对教学效果造成影响。1932 年开始，由蔡元培领衔成立了“大学丛书编委会”，组织遴选国外教材，编译、编写中文教材，姜立夫、胡敦厚、何鲁均参与其中，保证了教科书的高水平。大学丛书由商务印书馆编印出版，包括了数学方面许多教材和教学参考书。

随着学科逐渐形成一定规模，人才的分层次培养开始被关注。在政府鼓励下，北京大学、清华大学、交通大学、南开大学、北洋大学相继成立研究院、所，着眼于高水平学术研究人员的培养。1931 年，国民政府公布《学位授予法》，规定学位分“学士”、“硕士”、“博士”三级，以及三级学位的授予条件和办法。同年，清华大学在国内第一次正式招收数学专业硕士研究生，1934 年，陈省身成为本土培养的第一个硕士毕业生。随后，北京大学、中央大学、浙江大学以及后来的西南联合大学，都开展了研究生培养工作。

为了紧跟世界一流数学水平，民国时期数学领域的国际交流活动继续朝更深层次、更高学术水平拓展。利用庚款公派留学生这时仍在延续，每期都有数学专业名额。同时，从 20 世纪 20 年代开始成立的各类文化基金会，如中华教育文化基金会，开始资助国内的优秀学者访学国外教育科研机构，著名的有华罗庚访问剑桥大学（1936 年）和普林斯顿高等研究院（1946 年），陈省身访学巴黎（1936 年）和普林斯顿高等研究院（1943 年），许宝騄访问加州大学伯克利分校和哥伦比亚大

学(1945 年)。与此同时,一批国外著名数学家应邀来华访学,包括英国数学家和哲学家罗素(B. Russell,1872—1970),法国数学家潘勒韦(P. Painlevé,1863—1933)、博雷尔(É. Borel,1871—1956)、阿达马(J. S. Hadamard,1865—1963),德国数学家布拉施克(W. J. E. Blaschke,1885—?),美国数学家伯克霍夫(G. D. Birkhoff,1884—1944)、奥斯古德(W. F. Osgood,1864—1943)、维纳(N. Wiener,1894—1964)等人。民国时期积极的中外数学交流,有效地提高了当时数学教育和学术研究的整体水平。

在这个时期,数学领域的教学思想和研究方法日臻完善,其中尤以清华大学、北京大学、浙江大学以及抗战时期的西南联合大学为代表。

清华大学从初建算学系开始,就放眼全国,把培养数学研究专门人才作为办学目标。对学生的培养重质不重量,实行严格的挑选和大量淘汰制度。倡导教学与科研相结合。注重国际交流,通过各种途径让师生出国留学和进修,并延请多位国际数学家来校任教、讲学。课程设置上,除了注重基础训练,还引进国际最新学术成果组织研讨,引发师生从事学术研究的兴趣。从 20 世纪 30 年代起,清华大学数学系就成为国内知名的学术中心之一,先后由著名数学家郑之蕃、熊庆来、杨武之、江泽涵、赵访熊、段学复等担任数学系主任,包括孙光远、曾远荣、胡坤升、陈省身、华罗庚、吴大任、庄圻泰、许宝騄、闵嗣鹤、徐利治、程民德、吴新谋、万哲先、冯康、周毓麟等都在此工作和学习过(图 3-34)。



图 3-34　1929 年,清华研究院部分师生

北京大学数学系作为中国创办最早、历史最久的数学系,在推进中国高等数学教育体制化的过程中起到了重要作用。20 世纪 30 年代,从哈佛大学获得博士学位的江泽涵(1902—1994,图 3-35)归国执掌北大数学系后,在冯祖荀的支持下,对行政和教学锐意改革,整顿学风。江泽涵推行哈佛大学和姜立夫在南开大学的训练模式,拟订了一个少而精的课程教学计划,对必修课、选修课进行了重新调整和安排,在纪律、作业和考试方面严格要求学生。同时加强了与欧美学术界的交往。种种举措之下,北大数学系的教学和科研焕发了新的活力,培养出樊畿、王湘浩、王寿仁、张禾瑞等优秀数学家。



图 3-35　江泽涵

浙江大学数学系在20世纪30年代由陈建功、苏步青主持之后，目标是把浙大数学系办成第一流数学系，创办一个具有现代水平的教学和科研相结合的基地，浙大数学系得到快速发展(图3-36)。浙大数学系首创"数学研究"课程，类似于现在的讨论班，由教师和学生根据自己的研究成果，或者是国际上的重要论著和最新国际刊物上的重要文献，轮流做报告，报告人需要认真准备，仔细推敲和演算，听报告的师生则严格追问，然后双方反复讨论、推敲，务求甚解。讨论班的形式，有效提高了学术研究水平。王福春、曾炯、张素诚、程民德、谷超豪、王元等著名数学家在浙大数学系工作、学习过。


图3-36　1931年浙江大学数学系欢迎苏步青合影，前右三起为钱宝琮、苏步青、陈建功

西南联合大学是抗日战争期间，北京大学、清华大学和南开大学西迁昆明联合而成。西南联大秉承尊重教育、学术独立的办学方针，尽管条件极其简陋，但取得了巨大成就，其中数学系尤为突出。由于特定的历史原因，数学系的师资力量在当时国内首屈一指，姜立夫、江泽涵、杨武之、申又枨、程毓淮、刘晋年、王湘浩、龙季合、华罗庚(图3-37)、陈省身、许宝騄等著名数学家云集。在课程设置上仿照欧美体制，在重视专业基础的同时，开设了大量专业选修课，很多属于数学新领域，已经接近国际水平，拓扑学、解析数论、数理统计等课程都是国内首次开设。在学术研究方面则是大力兴办数学讨论班，通过师生间的学术交流，培养研究兴趣，锻炼分析探索能力。华罗庚毕生的成就多是发端于这个时期。


图3-37　华罗庚一家在西南联大

民国时期数学教育的组织、基本规范和制度已经形成，建立起了一套相对完善的体制。在这种体制下，教育和学术研究得以健康发展，许多学术成果达到了当时世界先进水平。

2. 中国数学会

20 世纪 30 年代，高等数学教育已经初具规模，各高校纷纷成立数学研究团体，这些团体出版刊物，积极组织各种数学学术活动，成为中国数学会成立的先声。

胡敦复(1886—1978，图 3-38)，中国数学界杰出的组织者。1907 年，胡敦复赴美国留学，1909 年获得康奈尔大学理学学士学位，并在当年回国负责庚款留美考选事务。因不满外国列强对中国教育的干涉和不公平待遇，胡敦复赴上海创建大同大学(1912—1952)，并把大同大学发展成为民国时期最好的私立大学之一。


图 3-38　胡敦复

胡敦复长期为中国数学教育事业呕心沥血，做出了巨大贡献，影响深远。胡敦复重视教材建设，大同大学成立不久就组织"大同学院丛书丛刊编辑部"，并亲自编译完成初中用《算术》1 册、《几何》2 册，以及《平面几何学》、《立体几何学》、《积分方程式之导引》和《英文宝库》等书，对中国早期的中学教材建设起了奠基性的作用。翻译过程中，为了统一数学名词，胡敦复积极参与了科学名词的起草和审定工作。从 1930 年开始，胡敦复兼任交通大学数学系主任长达 15 年。

随着数学教育、研究队伍的日渐扩大，胡敦复认为有必要成立全国性的学术组织。1934 年秋冬，胡敦复在上海和朱公谨、范会国、顾澄等，联络北京的熊庆来、冯祖荀，重庆的何鲁，杭州的陈建功、苏步青等知名数学家商讨成立学会事宜。经过半年的积极筹备，1935 年 7 月 25 日至 27 日，在交通大学图书馆，胡敦复主持召开了中国数学会正式成立大会。大会推选胡敦复为董事会主席，胡敦复、冯祖荀、周美权、姜立夫、熊庆来、陈建功、苏步青、江泽涵、钱宝琮、傅种孙等为董事会成员。中国数学会几乎囊括了当时中国数学界的全部精英(图 3-39)。


图 3-39　1936 年数学会合影，前排中为维纳

中国数学会的宗旨是通过组织国内外学术交流，出版数学刊物，促进数学教育改革等活动，达到推动数学学科的进步和普及的目的。1935 年 9 月，中国数学会受教育部委托最后勘核数学名词，确定中英数学译名共 3 426 条，其中相当多的名词一直沿用至今。1936 年 8 月，中国数学会创办的学术性刊物《中国数学会学报》、普及性刊物《数学杂志》出版。抗战期间，姜立夫在昆明成立"新中国数学会"，使学会的学术活动得以延续。

中国数学会将全国数学工作者首次组织起来，集中力量挑起了在中国开展数学研究、发展现代数学的重任。中国数学会的诞生和学报的出版，标志着中国数学发展到了一个新的时期。

3. 中央研究院数学研究所

中央研究院是民国时期国家最高学术研究机构，直接隶属于总统府，1928 年在南京成立，宗旨为“实行科学研究，并指导、联络、奖励全国研究事业，以谋科学之进步，人类之光明”。

1941 年，为了加强基础数学研究，中研院委托姜立夫在昆明成立数学所筹备处，负责筹建数学研究所。但战争期间人员星散，组织不易，1946 年筹备处复员至上海，接收日伪上海自然科学研究所，至 1947 年中研院数学所才宣告正式成立。首任所长姜立夫，陈省身任代理所长(当时姜立夫在美国访学)，由姜立夫、陈省身、陈建功、华罗庚、李华宗、苏步青、江泽涵、许宝騄、樊畿、段学复、周炜良、胡世桢、王宪钟担任正副研究员。

数学所自筹备处开始，就积极开展学术研究活动。尽管当时处于战争期间，条件极为艰苦，图书、资料都难以收集，但他们充分利用西南的少量学术资源，到 1944 年，已经完成高水平论文 71 篇，多半发表在欧美学术刊物上。数学所正式成立之后条件转好，陈省身开授“拓扑学”课程，每周 12 小时，培养了吴文俊、张素诚、廖山涛、路见可、陈杰、陈德璜、周毓麟、叶彦谦、曹锡华、贺锡璋、马良、孙以丰、杨忠道、陈国才、林銧等一批年轻数学家。同时，数学所与普林斯顿高等研究院交流密切，这个时期先后有多人赴美访学、进修。1949 年，姜立夫受命将数学所图书、仪器转移到台湾，数学所结束了在大陆的使命。

中研院数学所成立的时间虽短，但成果丰硕，对国内基础数学的研究起到了组织、带动和示范的作用，探索出国立学术机构的有效运行模式。

4. 民国时期的主要数学成果

民国时期数学的学术研究集中在基础数学和纯数学领域，在国内外共发表论文 600 余篇。

分析学

陈建功(1893—1971)的三角级数论对傅里叶分析理论做出重要贡献。

熊庆来(1893—1969)在亚纯函数方面建立了无穷亚纯函数论与整函数论，定义出“熊氏无穷函数”。熊庆来是第一个参加国际数学家大会的中国人，是培养出严济慈、华罗庚、赵忠尧、胡坤生、庄圻泰、陈省身、彭桓武、钱三强、钱伟长、杨乐、张广厚等各领域科学家的杰出教育家。

民国时期，在泛函分析、变分法、微分方程与积分方程几个方面也有研究成果。

数论与代数

杨武之(1896—1973)的《华林问题的各种推广》开创了国内现代数论的研究。

华罗庚(1910—1985)在解析数论方面关于素数变换的华林问题的研究以及变数之素数的方程组的研究取得令世人瞩目的成果。1941年，华罗庚的《堆垒素数论》获得教育部颁发的首届学术研究及著作发明国家一等奖。

几何与拓扑学

苏步青(1902—2003)在仿射微分几何学和射影微分几何学研究方面取得出色成果。

江泽涵(1902—1994)把复迭空间推广到不动点理论的研究，推动了该理论的发展，成为我国拓扑学研究的开拓者之一。

陈省身(1911—2004)的《埃尔米特流形的示性类》为纤维丛理论和示性类理论的研究做出了开创性的工作，从此微分几何进入新时代。

概率论与数理统计

许宝騄(1910—1970)在一元和多元统计分析方面得到许多基本定理及严密证明，他的数理统计论文获得教育部颁发的首届学术研究及著作发明国家二等奖。

数学史

李俨(1892—1962)和钱宝琮(1892—1974)开创了中国数学史的研究，他们在古算史料的注释整理和考证分析方面做了许多奠基性的工作，使我国的民族文化遗产重放光彩。

新中国数学教育

新中国成立以后，由于意识形态的差异，对民国时期的教育体制进行了全面改造，经历了“国家利益至上，强调实用人才培养”、“政治挂帅与教育停滞”、“价值整合及公平教育”三个不同的发展阶段。在这个曲折的发展历程中，新中国教育事业取得巨大成就，为国家的快速发展培养了大量人才，而其间产生的教训也促使我们不断探索更适应中国国情的科学教育体制。

1. 新中国学制的变迁

新中国成立之后，在完成对旧有教育机构的接收和初步改造之后，1951年10月，中央人民政府政务院公布了《关于改革学制的决定》。新的学制体现了“全盘苏联化”的特点，学制规定：对3～7周岁幼儿实施幼儿园教育。小学实行5年(后

调整为6年)一贯制的基础教育。中等教育分为普通中学和中等专业学校;普通中学修业年限为6年,分初中、高中两级,各3年;中等专业学校招收初中毕业生,根据国家建设需要实施职业教育。实施高等教育的学校为大学、专门学院和专科学校。同时,设立各种速成、业余、函授学校和特殊教育学校(面对残障人群)作为补充。

为了配合新学制的实施,1950年8月教育部颁发《中学暂行教学计划(草案)》,初步确立了我国中小学新课程体系。新的课程体系模仿苏联模式,形成全国统一教学计划、统一教学大纲与统一教科书的"大一统"课程模式,规定中小学教材必须全国统一供应,并成立人民教育出版社,承担编写国家统一教材的任务。这一时期中小学的课程设置,在形式上强调服从中央部署,全国统一,只设必修课,不设选修课;在内容上,注意到科学性和思想性的结合。

20世纪50年代,教育体制做了相应的调整。例如,1957—1958年间,强调知识教学与劳动教学相结合;1960年国民经济困难时期,提出缩短学制,把学制调整为小学、中学各5年的十年制,相应对课程进行精简。1963年,颁布《全日制中学数学教学大纲(草案)》,提出加强计算能力、逻辑推理能力和空间想象能力的培养。根据这一大纲,人民教育出版社新编了一套十二年制学校中学(学制6年)数学课本,包括初中《代数》、《平面几何》,高中《代数》、《立体几何》、《三角》、《平面解析几何》。这套教材明确了中学的教学内容重点在于数与数、形与形、数与形以及它们相互之间的联系,内容完善,难度适宜,标志着新中国数学教育逐步走向成熟。总体来说,这个时期的教育模式仍是以"教"为主,强调如何对学生有效地灌输数学知识。

1966～1976年间,正常的教学秩序被打破,大学停办,中、小学的教学时间被大量的政治学习、学工学农劳动挤占,教育水平急剧下滑,是中国教育体制停滞甚至倒退的10年。

1986年国家颁布《中华人民共和国义务教育法》,1994年颁布《中华人民共和国教师法》,1995年颁布《中华人民共和国教育法》等一系列教育法规,从立法高度对教育体制进行约束。目前我国现行学制分为初、中、高三级教育。初等教育的普通小学,招收6～7周岁的儿童,修业年限5～6年,实行一贯制。中等教育的普通中学,分为初级和高级两个阶段,修业年限为5～6年(初中3年,高中2～3年)。其中,从小学到初中阶段为普及义务教育。高等教育的本科生教育分为大学和专门学院,修业年限一般为4年;研究生教育,由各高等院校和有关科研单位招收攻读硕士学位或博士学位的研究生,修业年限均为2～3年。同时,兴办成人教育、职业教育、特殊教育(面对残障人群)作为对普通教育的合理补充。

改革开放之后，随着教育观念的进步，中小学的课程设置和教材进行了多次调整。进入21世纪之后，开始实施素质教育，强调在教学中关注结果，关注过程，关注情感、态度、价值观。中小学数学教育随之发生转变，在侧重学生的数学基础知识、基本技能培养的同时，更加注重学生对基本的数学活动经验的掌握，培养演绎、抽象、归纳、类比等数学的核心思维。在初中课程设置中增加"探究性活动"；在高中课程设置中增加"研究性课题"，内容上引进形式逻辑、平面向量、概率统计、微积分的初步知识，规定高中数学课程含必修课、限定选修课和任意选修课。同时，从2001年开始，教材的使用放开，打破了人民教育出版社一统天下的局面，学校可以根据自身具体情况选用合适的教材。中国的数学教育更加重视受教者的感受，开始向以"学"为主转变。

2. **新中国的高等教育**

1949年新中国成立后，中央人民政府就开始了对民国时期大专院校的接收工作。公立大学由国家管理，私立大学建立党组织，教会大学收归国有，完成建国初期对高等教育体制的初步改造和调整。

新中国成立后，在国家快速工业化的压力之下，工程技术人才需求大增，加上"全盘苏化"的政治气候影响，1952年中央人民政府大规模调整了全国高等学校的院系设置。把教育的重心放在与经济建设直接相关的高等教育，尤其是工程和科学技术教育上；教育计划与国民经济建设计划紧密相连，按产业部门、行业的需求确定招生和学生分配；国家对高等教育实行垄断，学生全部免费。原有的高等学校经过调整后，分别成为综合性大学（实际是文理学院）、专门学院与专科学校，导致综合性院校明显减少，高校丧失教学自主权，社会学、政治学等人文社科类专业被停止和取消，私立、教会教育退出历史舞台。这次院系调整是对教育体制的重建，基本上移植苏联模式，彻底取消欧美式教育制度，对以后的教育领域影响深远。

在这次院系调整中，清华大学文学院、理学院、法学院并入北京大学，只保留工学院并与北京大学工学院、燕京大学工科各系合并。清华大学数学系被撤销，人员并入北京大学，图书转入当时的中国科学院的数学所筹备处，只留下高等数学教研室，承担全校工科数学基础课的教学任务。北京大学数学系扩大为数学力学系，先后成立了数学分析与函数论教研室、代数教研室、几何教研室、微积分教研室、高等数学教研室、力学教研室以及计算数学教研室和概率论教研室。浙江大学与清华大学类似，调整成为以工科为主的专门大学。在院系调整中，复旦大学获益最大，相继并入浙江大学、交通大学、同济大学、大同大学（撤销）、沪江大学（撤销）、震旦大学（撤销）、圣约翰大学（撤销）、南京大学、金陵大学（撤销）、安徽大

学、上海学院(撤销)的文理科专业,引进了苏步青、陈建功、杨武之等著名数学家,成为当时重要的数学学术基地。

1956年,在原来院系调整的基础上,又成立了一批专门化的工科院校,直到1958年中国科学技术大学成立,大规模的院系调整才宣告基本结束。这次高等教育体系的彻底重建,对建国初期的工业化建设和国防建设做出了很大贡献,通过对人才的集中使用在应用领域也取得了不少可喜成果。但从长远来看,高校失去了办学自主权,阻碍了学校的自由发展,专门化办学与国际上交叉学科快速发展的趋势相违背,直接削弱了一些原有优秀大学的实力,使得这些学校与国际一流大学的差距进一步拉大。

1966～1976年间,高等教育受到严重冲击。1966年,废除高考,大学停止招生,部分大学师生下放劳动。十年间,中国高等教育严重倒退。

1977年,以恢复高考为标志,中国高等教育重新走向正规。为了扭转种种不利局面,在争取国家更多投入的同时,各高校数学系积极开展各种学术交流,一方面努力"派出去",向先进国家派遣大量留学生、访问学者,另一方面积极邀请国外专家来系讲学,大批国际知名学者和华裔数学家赴华讲学,同时克服困难组织召开国际会议,学习和了解外部世界,高等数学教育局面为之一新。

1985年在陈省身建议下,南开大学成立数学研究所,从此陈省身以南开数学所为基地,亲自主持举办学术活动,培养出众多优秀的青年数学家。随后,北京大学、清华大学、复旦大学、浙江大学相继成立数学院(所),高等学校的数学教育、科研、学术研究迈上了新的台阶。

3. 国立数学学术机构

1952年,为了加强基础数学的研究,中国科学院数学研究所正式成立,由华罗庚担任首任所长,所址设在清华园内,确立了纯粹数学与应用数学协同发展的方针。最早成立的研究小组有数论、微分方程、力学、计算机研制、概率统计、代数、拓扑学等。

中科院数学所成为当时国内数学领域学术研究的组织者,科研水平居于领军位置。1956年,我国颁发首届国家自然科学奖,在全部3项一等奖中,数学所获得了2项,即华罗庚的"典型域上的多元复变数函数论"和吴文俊的"示性类与示嵌类的研究"。

20世纪60年代,华罗庚、陆启铿等人在多复变函数领域取得重大成果;冯康等人于20世纪60年代初独立于西方创立的有限元计算方法,在国民经济和国防建设的许多部门获得了广泛的应用;1973年陈景润、王元正式发表哥德巴赫猜想的研究进展;1975年,杨乐、张广厚发表了关于值分布理论的研究。这些代表性

的工作向世人展示了数学研究所科研人员在极度艰难的条件下，坚持数学研究而取得的标志性成果。

1979年底，根据中国科学院的决定，部分人员从数学所分出成立了系统科学研究所，从事控制理论、运筹理论、统计学、系统工程以及相关数学边缘学科的研究。数学所部分研究人员与原中国科学院应用数学推广办公室人员合并，组建成立应用数学研究所。数学研究所则以基础理论研究为主，兼顾应用数学和计算机科学等其他方向。1985年，在王元和杨乐的倡导下，数学所成为中国科学院首批开放的研究所之一。

1998年，由中科院数学研究所（建于1952年）、应用数学研究所（建于1979年）、系统科学研究所（建于1979年）及计算数学与科学工程计算研究所（建于1995年）等四个研究所通过整合，成立了中国科学院数学与系统科学研究院。

中国科学院数学与系统科学研究院是一个综合性的国立学术研究机构，覆盖了数学与系统科学的主要研究方向。研究院的方针是在数学与系统科学领域，面向国际发展前沿，面向国家战略需求，做出原创性、突破性和关键性的重大理论成果与应用成果，造就具有国际重要影响的学术带头人和一批杰出人才。发展目标定位于在数学与系统科学领域内，成为国际上有重要影响的研究中心、培养和造就高级研究人才的著名中心、国民经济和国防建设有关问题研究和咨询的重要中心。

4. 现代数学成就

中国现代数学一百多年的发展历程虽然曲折和艰辛，但也取得了丰硕成果，涌现出了许多杰出的数学家，成为中国数学各分支的奠基人或集大成者。同时，中国数学家的成就，对推动国际数学学科的发展也起到了重要作用，一批以华人数学家的名字命名的数学成果得到国际数学界的公认。

李氏恒等式：李善兰（1811—1882）在级数求和方面的研究成果，在国际上被命名为“李氏恒等式”。

华氏定理：华罗庚（1910—1985）关于完整三角和的研究成果被国际数学界称为“华氏定理”；他与王元（1930—）提出的多重积分近似计算的方法被誉为“华—王方法”。

苏氏锥面：苏步青（1902—2003）在仿射微分几何学方面的研究成果被国际上命名为“苏氏锥面”。

熊氏无穷级：熊庆来（1893—1969）关于整函数与无穷级的亚纯函数的研究成果被国际数学界誉为“熊氏无穷级数”。

陈示性类：陈省身（1911—2004）关于示性类的研究成果被国际上称为“陈示

性类”。

樊的极大极小不等式：樊畿（1914—2010）在非线性分析的基本原理上的突破被国际上称为“樊的极大极小不等式”；他在线性规划理论中对无限维空间的定义被国际上称为“樊条件”。

周氏坐标：周炜良（1911—1995）在代数几何学方面的研究成果被国际数学界称为“周氏坐标”；另外还有以他命名的“周氏定理”和“周氏环”。

吴氏方法：吴文俊（1919—）关于几何定理机器证明的方法被国际上誉为“吴氏方法”；另外还有以他命名的“吴氏公式”。

柯氏定理：柯召（1910—2002）关于卡特兰问题的研究成果被国际数学界称为“柯氏定理”；另外他与数学家孙琦在数论方面的研究成果被国际上称为“柯—孙猜测”。

陈氏定理：陈景润（1933—1996）在哥德巴赫猜想研究中提出的命题被国际数学界誉为“陈氏定理”。

陈氏文法：陈永川（1964—）在组合数学方面的研究成果被国际上命名为“陈氏文法”。

周氏猜测：周海中（1955—）关于梅森素数分布的研究成果被国际上命名为“周氏猜测”。

姜氏空间：姜伯驹（1937—）关于尼尔森数计算的研究成果被国际上命名为“姜氏空间”；另外还有以他命名的“姜氏子群”。

夏氏不等式：夏道行（1930—）在泛函数积分和不变测度论方面的研究成果被国际上命名为“夏氏不等式”。

陆氏猜想：陆启铿（1927—）关于常曲率流形的研究成果被国际上称为“陆氏猜想”。

杨—张定理：杨乐（1939—）和张广厚（1937—1987）在函数论方面的研究成果被国际上称为“杨—张定理”。

王氏悖论：王浩（1921—1995）关于数理逻辑的一个命题被国际上称为“王氏悖论”。

侯氏定理：侯振挺（1936—）关于马尔可夫过程的研究成果被国际上命名为“侯氏定理”。

景氏算子：景乃桓（1962—）在对称函数方面的研究成果被国际上命名为“景氏算子”。

袁氏引理：袁亚湘（1960—）在非线性规划方面的研究成果被国际上命名为“袁氏引理”。

卡拉比—丘流形:丘成桐(1949—)在微分几何领域对"卡拉比猜想"的证明被国际上命名为"卡拉比—丘流形"。

2002 年,国际数学家大会在中国举行,会议选出 20 个大会报告和 174 个特邀报告,代表了数学科学领域中的前沿成果与重大进展。大会期间,中国高等院校、研究单位踊跃参与,有 37 个单位承办了卫星会议。大会上,田刚、萧荫堂、张圣容 3 名华裔数学家作 1 小时大会报告,丁伟岳、王诗宬、龙以明、曲安京、严加安、张伟平、陈木法、周向宇、洪家兴、郭雷、萧树铁和葛力明等 12 位大陆数学家作 45 分钟邀请报告。这既是国内数学领域成就的集中展示,也是国际数学界对中国数学界的肯定。

5. 现代数学家

现代中国有成就的数学家不胜枚举,我们只能选取几位代表人物予以介绍。

华罗庚

华罗庚(图 3-40)的最初学历仅为初中,通过青年时代的自学和熊庆来等老一辈数学家的拔擢,成为世界级的数学家和中国近代数学的开创人之一。华罗庚在解析数论、矩阵几何学、典型群、自守函数论、多复变函数论、偏微分方程、高维数值积分等诸多数学领域都做出了卓越贡献。中华人民共和国成立之后,华罗庚创办中科院数学研究所、中国科学技术大学数学系,发现并培养了陆启铿、王元、龚昇、陈景润等大批数学家。由于华罗庚的重大贡献,有许多用他的名字命名的定理,如华引理、华不等式、华算子与华方法等。华罗庚还被列为芝加哥科学技术博物馆中当今世界 88 位数学伟人之一。


图 3-40 华罗庚

陈省身

陈省身(图 3-41)是现代微分几何的开拓者,曾获数学界终身成就奖——沃尔夫奖。陈省身对整体微分几何的卓越贡献,影响了半个多世纪的数学发展。陈省身一生主持、创办了中研院数学所、加州大学伯克利分校数学所、南开大学数学所,这三大纯粹数学研究所造就了一批承前启后的数学家。由于在微分几何领域的诸多贡献,以陈省身命名的数学定义有"陈空间"、"陈示性类"、"陈纤维丛"等。


图 3-41 陈省身

苏步青



图 3-42　苏步青

苏步青(图 3-42)是世界著名微分几何学家,射影微分几何学派的开拓者,早年对仿射微分几何学和射影微分几何学做出了贡献,20 世纪四五十年代开始研究一般空间微分几何学,60 年代开始研究高维空间共轭网理论,70 年代以来在中国开创了新的研究方向——计算几何,为中国数学走向现代化做出了巨大贡献。



图 3-43　陈景润

陈景润

陈景润(图 3-43)是华罗庚的学生,数论学家。陈景润是一生只做一件事的人,那就是哥德巴赫猜想,他一生只专注于这个领域而取得了举世瞩目的成就。迄今为止,哥德巴赫猜想依然是世界级未解难题,陈景润证明了“1+2”,是离解决哥德巴赫猜想即“1+1”问题最近的人。陈景润为世人熟知的事迹,引导当年大量热血学子走上数学道路。

丘成桐



图 3-44　丘成桐

丘成桐(图 3-44)是陈省身的学生,因解决微分几何的许多重大难题而获得数学界的诺贝尔奖——菲尔兹奖。丘成桐的第一项重要研究成果是解决了微分几何的著名难题——卡拉比猜想,从此名声鹊起。他把微分方程应用于复变函数、代数几何等领域,取得了非凡成果,比如解决了高维闵可夫斯基问题,证明了塞凡利猜想等。这一系列的出色工作终于使他成为菲尔兹奖得主。

八、数学应用一览



数学的特点是:高度的抽象性、精确性以及应用的广泛性。20世纪以来的数学,呈现出更高的抽象性发展趋势与空前的应用广泛性。一方面数学的核心领域变得越来越抽象,另一方面数学的应用也变得越来越广泛。核心数学创造的许多高度抽象的语言、结构、方法与理论,被反复证实是其他科学技术和人类生产与社会实践中普遍适用的工具,这反映了数学抽象理论与客观现实世界之间的深刻复杂而又奇妙的联系。数学的高度抽象性与内在统一性,不断在更高层次上决定着这门学科应用的广泛性。下面我们将概览数学在物理、生物、经济、统计、运筹等领域及社会发展中的应用,看到随着应用发展出了数学的新兴分支,如统计数学(涵盖种群遗传学、优生学、生物计量学、心理计量学、社会计量学、经济计量学)、运筹数学(包含规划数学、排队论、网络流理论、博弈论)、数理科学(包括数学物理学、数学生物学、数学生态学、数学心理学、数学社会学、数学语言学等)、系统科学(如控制论、信息论)、计算数学(包括计算力学、计算流体力学、计算物理学、计算化学等)。

我们将从数学分别在自然科学、社会科学中的应用以及数学在实际应用中对自身的发展,看到数学如何将隐藏于其中的“不可见”变为“可见”。

数学在自然科学中的应用

科学是推动社会进步的动力,而在推动科学发展中发挥强大功能的是数学。科学发展的关键在于理论思维与精密实验观测的结合。在理论思维中,数学思维占有重要地位,它使科学概念精确化、定量化,并利用不变性、对称等特有思想推导出数学规律;而在实验观测中,使用数学方法推算、处理数据以及揭示规律等,不断推动着自然科学的发展。以下从若干侧面概述有关认识。

1. 数学与物理学

物理学的发展与数学的应用密不可分。18世纪是数学与经典力学相结合的黄金时期;19世纪数学的应用转移到电学与电磁学;20世纪后,数学相继应用于

相对论、量子力学以及基本粒子理论等方面，促进了物理学科的大发展，同时也刺激了数学本身的发展。

20 世纪里，最成功的两个物理理论是量子场论和广义相对论，分别精确地描述了微观世界里的粒子和宏观世界里的天体的运动规律。量子场论中的基本方程是薛定谔方程，广义相对论的基本方程是爱因斯坦场方程，它们在一定程度上却互不相容。从爱因斯坦开始，几代物理学家梦寐以求的目标就是将这两组方程统一到同一个理论框架下。这样大至天体星球、小到基本粒子这些宇宙万物的运动规律和相互作用都由这一组方程式来描述。这就是大统一场理论，被人们称为“万有理论”或“终极理论”。

广义相对论的发展，促使科学家去寻求电磁场与引力场的统一表述，第一个大胆尝试的是数学家外尔（H. Weyl，1885 1955），他将大范围微分几何应用于统一场论中。他在 1918 年提出了规范场理论，也称为“规范不变几何”。统一场论的探索又扩展到基本粒子间的强相互作用和弱相互作用。1954 年物理学家杨振宁（1922—）和米尔斯（R. L. Mills）提出了“杨—米尔斯理论”，揭示出规范不变性可能是所有四种相互作用——电磁、引力、强、弱相互作用的共性，开辟了用规范场论来统一自然界这四种相互作用的新途径。数学家发现，描述物理规范势需要的数学工具就是微分几何中纤维丛上的联络，这是数学上早已存在的，而带来统一场论诱人前景的杨—米尔斯方程就是数学上的一组非线性偏微分方程。经过几代物理学家的努力和无数次的失败，1981 年后兴起的“弦理论”被人们认为最有希望完成大统一的梦想。弦理论的基本假设是：宇宙中最基本的粒子是一些快速振动的弦。就像振动的小提琴琴弦带给我们美妙的旋律一样，弦理论中这些振动的弦作为最基本的元素构成了五彩缤纷的世界。弦理论中用到的数学涉及微分拓扑、代数几何、微分几何、群论、无穷维代数、复分析与黎曼曲面的模理论。

2. 数学与生物学

数学在物理学、化学等自然科学中的应用很好理解，但在生物学中的应用却不太为人所熟悉。的确，数学方法被引入生物学研究相当迟缓，大约始于 19 世纪。

1838 年，荷兰数学家费胡斯特（P. F. Verhulst，1804—1849）建立了著名的逻辑模型：$\frac{dx}{dt}=rx\cdot(1-\frac{x}{k})$，其中 $x(t)$ 表示 t 时刻某地区的人口总数，k 为环境的容纳量（或最大人口容量），它反映资源的丰富程度。此模型体现了环境、资源等因素对人口持续增长的阻滞作用，故又称为阻滞增长（或密度制约）模型，也同样适用于自然界生物种群的生长繁殖。

20世纪初,英国统计学家皮尔逊(K. Pearson,1857—1936)首先在遗传学与进化论中使用统计学方法。随后,1926年意大利数学家沃尔泰拉(V. Volterra,1860—1940)建立的微分方程$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=ax-bxy\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=cxy-dy\end{cases}$成功地解释了生物学家观察到的地中海中不同鱼种周期消长的现象,方程中x表示食饵即被捕食的小鱼数,y表示捕食者即食肉大鱼数。从此,微分方程成为建立各种生物模型的重要工具,并不断取得重要成果。如霍奇金-哈斯利(Hodgkin-Huxley)方程被用来描述神经脉冲传导过程,哈特莱茵-拉特里夫(Hartline-Ratliff)方程描述了视觉系统侧抑制作用。

20世纪50年代,拉开了拓扑学与生物学结合的序幕。科学家发现了DNA(脱氧核糖核酸)的双螺旋结构,在电子显微镜下观察到双螺旋链有缠绕与扭结,将扭结解开再复制出来就可以深入了解DNA的结构,这就将数学中的代数拓扑派上了用场。数学家还为生物学家提供了新的工具——琼斯(Jones)多项式来对观察到的DNA结构中的扭结进行分类。

20世纪60年代,CT扫描仪的发明带来医学诊断技术的飞跃发展。1963—1964年间,美籍南非物理学家科马克(A. M. Cormack,1924—1998)提出计算人体不同组织对X射线吸收量的数学公式,这就是数学上的拉东(J. Radon,1887—1956,奥地利数学家)变换,利用此原理,英国亨斯菲尔德(G. N. Hounsfield,1919—2004)发明了X射线断层扫描仪,即CT扫描仪。

除了上面提到的数理统计、微分方程、拓扑学、积分论以外,还有布尔代数应用于神经网络描述、傅里叶分析应用于生物高分子结构分析等。

3. **数学与天文学**

实用天文学的中心问题是计算轨道、确定行星在某一时刻所处的位置。从欧拉到高斯发展了轨道计算方法,并由此引出了小行星的发现及海王星的预见,这是数学的一个伟大胜利,常被引作数学威力的例证。高斯发展了最好的轨道计算法,通过三组数据即可确定小行星的轨道,他在1809年发表的这个结果至今仍在使用,经过适当改进编成程序使轨道计算自动化。天体运行定律在数学的协助下,第一次显示出精确的预测能力。第二次引起轰动的预测是海王星的发现,勒威耶(U. J. J. le Verrier,1811—1877)和亚当斯(J. C. Adams,1819—1892)先从数学上给出了海王星存在的预测,然后由望远镜观测发现其真实存在。此外,随着人造卫星的发射,卫星轨道的确定需要用数学解决。因为人造卫星公转周期短,不仅要考虑周期的摄动,还要考虑长期摄动对轨道计算进行修正,这是数学在天

文学上应用的一个重要方面。

三体问题和 n 体问题是天体力学中的中心问题，为此发展出一系列近似的方法，特别是摄动法，在 18—19 世纪受到许多大数学家的关注和研究。

数学在社会科学中的应用

1. 数学与社会进步

纵观人类社会的发展过程，人们可以看到，数学的发展与社会的进步有着密切的联系，为人类认识自然和改造自然做出了不可磨灭的贡献。数学对人类物质文明的影响，最突出地反映在它与从根本上改变了人类物质生活方式的产业革命的关系上。人类历史上有三次重大的产业革命，都与数学的新理论、新方法的应用有直接或间接的关联。

微积分创立后，在自然科学的各个领域得到广泛应用，特别是作为强有力的新工具，推动了以机械运动为主题的 17—18 世纪整个科学技术的高涨，成为 18 世纪六七十年代开始的第一次产业革命的重要先导。第一次产业革命的主体技术是蒸汽机、纺织机等，它们的设计涉及运动与变化的计算，这只有在微积分发明后才有可能。

始于 19 世纪 60 年代的第二次产业革命，按主体技术分为电机和电信两个阶段。这次技术革命是以电磁理论为基础的，而后者又与数学分析的应用密不可分，如法国数学物理学家泊松、安培等人运用微积分奠定了描述电磁作用的数学基础，现代无线电通信技术源于麦克斯韦从数学上对电磁波存在的预测，他的电磁学说是借助格林、高斯的位势理论和偏微分方程等数学工具建立的。

20 世纪 40 年代开始的第三次产业革命，以电子计算机发明、原子能利用以及空间技术、生产自动化为特征。提出现代计算机设计思想的是数学家冯·诺依曼和图灵；原子能的释放，则根据爱因斯坦（Albert Einstein，1879—1955）利用数学工具导出的公式 $E=mc^2$，揭示出质能转化的数量关系；自动化技术的发展受到了当时新兴的应用学科控制论的深刻影响。美国数学家维纳创立的控制论，广泛利用调和分析与数理统计等工具解决控制论中的核心问题——“预报问题”和通信“滤波问题”。

数学自诞生之日起就被用来解决人类生活中提出的各种问题，而数学在近现代生活中的直接应用更是大量和经常的。如数学理论成功有效地应用到经济中，形成的金融数学为全球金融资本运作提供了有效指导。在经济与产业中大显神通的“现代数学技术”有：运筹优化、工程自控、信息处理、数理统计、科学计算、模糊识别、图像处理等。根植于现代数学的原理和方法，经与计算机结合，产生了大

量有威力的“数学技术”，它们渗透到各行各业，成为高质高效的“高新技术”。现代科学的显著特征就是数学化，以数学结构描述事物或过程的结构，揭示了构成事物或过程的各要素间的联系和整体性。不容置辩的事实是：数学是构成现代物质文明的最底层的基石。

2. 数学与经济学

经济学被称作“社会科学的女王”，不仅是因为它研究的对象客观而明确，也因为它的定量化及数学化程度最高。20 世纪 40 年代以来，经济学研究逐渐数学化，数学方法在西方经济学中占据了重要地位，大部分诺贝尔经济学奖获得者的工作都与数理经济学相关。

20 世纪 50 年代美籍荷兰经济学家库普曼斯(T. C. Koopmans，1910—1985)将线性规划论应用于经济学中，以寻求资源配置效率与价格体系之间的对应关系。库普曼斯与提出线性规划理论的苏联数学家康托洛维奇(L. V. Kantorovich，1912—1986)同获 1975 年诺贝尔经济学奖。同时，这一时期的经济学引进了公理化方法而取得重大进展。经济学界长期关注但悬而未决的问题就是一般经济均衡价格的存在问题。通俗地讲，就是是否存在一个价格体系，使得消费需求与生产供给相等？这样的价格体系就是一般均衡价格体系。美籍法国数学家德布罗(G. Debreu，1921—2004)与美国经济学家阿罗(K. Arrow，1921—)利用凸集理论、不动点定理给出了一般经济均衡的严格表述和存在性证明，随后进一步将一般经济均衡理论公理化。此二人因此获得诺贝尔经济学奖。20 世纪 70 年代以后，借助微分拓扑、代数拓扑、大范围分析、动力系统等数学工具，一般经济均衡理论飞速发展。

20 世纪 70 年代以后，随机分析又进入了经济学领域，布莱克(F. Black，1938—1995)和斯科尔斯(M. S. Scholes，1941—)将期权定价问题归结为一个随机微分方程的解，从而导出著名的期权定价公式，即 Black-Scholes 公式，这一理论被视为金融数学方面的突破，被誉为金融数学的“华尔街革命”。

3. 数学与人文

数学与艺术在深层结构上最为接近，二者都反映了人类精神的伟大创造，而且都具有相当大的自由性。自古以来，数学与艺术关系密切。从毕达哥拉斯时代，乐理就是数学的一部分，他认为音乐同数学、天文学一样为宇宙的普遍和谐；开普勒在音乐与行星之间找到对应关系；莱布尼茨是用数学结构分析音乐的先驱。文艺复兴时期，西欧的绘画与数学平行发展，许多艺术家探索了透视法的数学原理。对原形与截景之间几何性质的研究发展出一个数学分支——射影几何学。

数学与哲学密切相关。由于数学及逻辑学自身的特点，自然成为理性主义哲学家最为关注的对象。受过数学训练的哲学家对当代哲学产生了重大影响，如19—20世纪的胡塞尔(E. Hussell，1859—1938)和罗素(B. Russell，1872—1970)。胡塞尔的早期哲学都是从算术及逻辑出发的，由此提出他的现象学观念，后来发展成为现象学哲学流派；罗素对数学的研究直接影响了他的哲学观点，罗素在追求确定性而努力为数学奠定一个稳固基础的过程中，发现了他的哲学方法——分析方法，在此基础上开创了现代分析哲学流派。

数学应用发展出的新分支

数学在推动科学发展的过程中也发展了自身，数学在各领域深入广泛的应用推动了越来越多的交叉分支的产生，如控制论、运筹学、数理统计等。

1. 控制论与最优化

控制论创始人维纳(N. Wiener，1894—1964)在第二次世界大战中接受了一项任务：设计一种有效指挥高射炮的装置。为了击中目标，就必须找到某种能预测飞机未来位置的方法，此即所谓的“预报问题”，是维纳控制论的主要来源之一。控制论的另一个来源是维纳研究通信时遇到的“滤波问题”：设计一种滤波器，这种装置能过滤噪声、复原信息。维纳的独到之处在于，用统计的观点统一处理这两类及其类似问题。一项信息的传送，可以看作依时间分布的可测量事件的序列，即统计学中所称的时间序列。预报、滤波问题的求解归结为特定数学算符的最优设计，以及实现这些算符的物理装置的最优设计。这个设计过程依赖于数学中变分法的极小化技术，同时取决于所处理信息的时间序列的统计学。维纳广泛利用调和分析与数理统计等数学领域中成熟的工具，建立起最优设计的方法，逐步形成了系统的控制理论。

维纳的控制论通常被称为“经典控制论”。20世纪50年代以后形成了作为系统调节与控制的一般规律的现代控制论，其主要分支之一是最优控制，主要是根据被控对象的数学模型，在容许范围内设计控制律，以使被控对象的性能指标达到最优。最优控制问题可以看作是函数极值问题的拓展，最优控制理论中最主要的数学方法是变分法，基本思想是将变分问题转化为微分方程的边值问题求解。20世纪50年代，苏联数学家庞特里亚金(L. C. Pontryagin，1908—1988)等发展的极大值原理，以及美国数学家贝尔曼(R. Bellman，1930—2005)发展哈密顿—雅可比(Hamilton-Jacobi)理论形成的动态规划法，成为最优控制理论的两大基石。最优控制广泛应用在国民经济和国防建设中。例如，运用最优控制理论，可以解决登月舱的月球软着陆问题，即让宇宙飞船在月球表面上实现软着陆(着

陆速度为0),寻求在着陆过程中发动机推力的最优控制律,使得燃料的消耗量最小;可以解决空间拦截问题,即发射空间武器拦截敌方空间武器的问题,其中的首要任务是为空间拦截器设计可实现拦截的导引律;可以寻求最优生产计划,使总成本最小。

2.运筹学

运筹学原意为“作战研究”,第二次世界大战时英国在对付德军空袭中运用了运筹学,在搜寻潜艇、深水炸弹投放方案、兵力分配等方面运筹学也发挥了功效。战后运筹学被引入民用部门,研究内容不断扩充而形成蓬勃发展的新兴应用学科。现在它已包含数学规划论、博弈论、排队论、决策分析、图论等众多分支。数学规划论是运筹学中一个基本而庞大的领域,就是为实际问题寻求某些对象最大化(如利润、安全等)或最小化(如支出、风险等)的方法。数学规划又分线性规划和非线性规划。1947年,美国丹齐格(G. B. Dantzig,1914—2005)独立发展了线性规划理论,设计了单纯形法来求解线性规划问题。

博弈论也是现代数学的一个新分支,充分应用于经济学中。博弈论最初主要是研究象棋、围棋以及赌博中的胜负问题,但只停留在经验层面上,正式发展成为一门学科是在20世纪初。1928年美籍匈牙利数学家冯·诺依曼(J. von Neumann,1903—1957)证明了博弈论的基本原理,并与经济学家奥斯卡·摩根斯坦(Oskar Morgenstern,1902—1977)于1944年合作出版了《博弈论与经济行为》一书,奠定了这一学科的基础和理论体系,标志着现代博弈理论的诞生。博弈论又称对策论,是研究多个决策主体(决策主体可以是一个人、企业或组织)的行为彼此相互影响时的决策以及这种决策的均衡问题,或者通俗地说,是研究不同情境下的策略选择的理论,已经在管理科学、国际政治、经济、外交、社会学等领域得到广泛应用。博弈论既可以对国家的经济理论选择、经济政策制定等宏观经济活动,也可以对公司企业的微观经济活动产生重大影响。有的西方国家企业专门聘请博弈论专家担任顾问和决策参谋,为公司经营中的定价、定产、收购、兼并、投标、拍卖等活动提供重要的、决定性参考意见。

3.数理统计

统计推断思想的萌芽在18—19世纪就已出现,但以概率论为基础、以统计推断为主要内容的现代意义的数理统计学,则到20世纪才告成熟。1763年,英国人贝叶斯(T. Bayes,1702—1761)发表《论机会学说问题的求解》,提出的“贝叶斯定理”可看作最早的一种统计推断程序。英国生物学家和统计学家皮尔逊1901年成功创立生物统计学,提出了“总体”概念,明确指出统计学不是研究样本本身而是要根据样本对总体进行推断,提出“拟合优度检验”,这是假设检验的先声。

他的工作也是“大样本统计”的前驱，他的学生戈塞特(W. S. Gosset，1876—1937)开创了“小样本统计”理论，使统计学研究对象从群体现象转变为随机现象。

现代数理统计学的奠基人是英国数学家费希尔(R. A. Fisher，1890—1962)，他在20世纪二三十年代，发展了正态总体下各种统计量的抽样分布，建立了系统相关分析与回归分析；1925年与叶茨(F. Yates，1902—1994)提出实验设计的数据分析方法——方差分析。费希尔也是假设检验的先驱之一，引进了显著性检验概念，还开辟了多元统计分析的方向，这个方向的奠基人也有中国数学家许宝騄(1910—1970)和美国数学家霍太林(H. Hotelling，1895—1973)。

1946年，瑞典数学家克拉默(H. Cramer，1893—1985)用测度论系统总结了数理统计的发展，使现代数理统计学走向成熟。第二次世界大战期间，美籍罗马尼亚数学家沃尔德(A. Wald，1902—1950)提出序贯分析和统计决策理论，后者引起战后数理统计思想的革新。



附　录



一、数学方面的奖项简介



沃尔夫奖

1976年1月1日，沃尔夫(R. Wolf)及其家族捐献1 000万美元成立了沃尔夫基金会，其宗旨主要是为了促进全世界科学、艺术的发展。沃尔夫1887年生于德国，其父亲是德国汉诺威城的一位五金商人，也是该城犹太社会的名流。沃尔夫曾在德国研究化学，并获得博士学位。第一次世界大战前移居古巴。他用了将近20年的时间，经过大量试验，历尽艰辛，成功地发明了一种从熔炼废渣中回收铁的方法，从而成为百万富翁。1961—1973年，他曾任古巴驻以色列大使，以后定居以色列。他是沃尔夫基金会的倡导者和主要捐献人。沃尔夫于1981年逝世。基金会的理事会主席由以色列政府官员担任，评奖委员会由世界著名科学家组成。沃尔夫基金会设有数学、物理、化学、医学、农业五个奖(1981年又增设艺术奖)，1978年开始颁发，颁发给那些“为人类利益以及各民族间的友好关系做出贡献的”杰出科学家和艺术家，而“不考虑他们的国籍、种族、肤色、宗教信仰、性别和所持的政治观点”。通常是每年颁发一次，每个奖项的奖金为10万美元，可以由几人分得。由于沃尔夫数学奖具有终身成就奖的性质，获奖的数学家都是蜚声数坛、闻名遐迩的当代数学大师，他们的成就在相当程度上代表了当代数学的水平和进展。

菲尔兹奖

菲尔兹奖是以已故加拿大数学家、教育家菲尔兹(J. C. Fields，1863—1932)的姓氏命名的。

菲尔兹1863年5月14日生于加拿大的安大略省哈密尔顿。他11岁丧父，18岁丧母，家境不算太好。17岁进入多伦多大学数学系学习，1884年获学士学位，1887年获美国约翰·霍普金斯大学的博士学位，其后在该校任教到1889年，继而在宾夕法尼亚州的阿勒格尼大学任教到1892年。之后，他远赴欧洲，游学巴

黎、柏林等地整整10年，与米塔-列夫勒(Mittag-Leffler)等著名数学家有密切的交往，这一段经历对于他的生活和观点产生了决定性的影响。1902年回国任教于多伦多大学，直到30年后去世。

菲尔兹主张数学发展应是国际性的，他对于数学的国际交流，对于促进北美洲数学的发展都抱有独特的见解并满腔热情地做出了很大的贡献。为了使北美洲数学迅速发展并赶上欧洲，是他第一个在加拿大推进研究生教育，也是他全力筹备并主持了1924年在多伦多召开的国际数学家大会(这是在欧洲之外召开的第一次国际数学家大会)。这次大会使他过分劳累，从此健康状况再也没有好转。但这次大会对于促进北美的数学发展和数学家之间的国际交流，确实产生了深远的影响。当他得知这次大会的经费有结余时，他就萌发了把它作为基金设立一个国际数学奖的念头。为此他积极奔走于欧美各国谋求广泛支持，并打算于1932年9月在苏黎世召开的第九届国际数学家大会上亲自提出建议。但不幸的是，他因脑溢血去世。菲尔兹在逝世前立下了遗嘱，他把自己留下的遗产加到上述剩余经费中，由多伦多大学的辛治(J. L. Synge)[①]转交给第九届国际数学家大会，作为设立一个国际数学奖的基金，大会接受了这一建议。菲尔兹原本要求此奖“应是纯国际性的，而不是以任何方式与任何国家、机构或个人的名字相联系”。但参加会议的数学家们为了赞扬、缅怀菲尔兹的远见卓识、组织才干和无私奉献的品格，决定将该奖命名为菲尔兹奖。

菲尔兹奖的一个重大特点是奖励年轻人，只授予年龄不超过40岁的数学家(这一点在刚开始的时候，似乎只是个不成文的规定，1974年在温哥华的大会上则做出了明文规定)，“作为对其已有工作的认可”和“鼓励得奖人进一步取得成就并激励其他人重新致力于斯”。

菲尔兹奖包括一枚金质奖章和1 500美元的奖金。奖章的正面是脸向右的阿基米德的浮雕头像，头像的周围镌刻的文字为：TRANSIRE SVVM PECTVS MUNDOQVE POTIRE(超越人类极限做宇宙的主人)；奖章的反面镌刻的文字为：CONGREGATI EX TOTO ORBE MATHEMATICI OB SCRIPTA INSIGNIA TRIBVSRE(全世界的数学家们为对知识做出新的贡献而自豪)，背景中是一个球内接于圆柱的几何图形(因为阿基米德证明了该球的体积和表面积是该圆柱的体积和表面积的2/3)。

就奖金数目来说，菲尔兹奖与诺贝尔奖的奖金相比可以说是微不足道，但为

①在筹办1924年国际数学家大会时，多伦多大学于1923年建立了的一个委员会，菲尔兹任主席，辛治任秘书。

什么在人们的心目中，它的地位竟如此崇高呢？主要原因有三：第一，它的获奖者是由数学界的国际学术团体——国际数学联合会执委会聘任的权威数学家组成的评委会，从全世界的第一流青年数学家中评定、遴选出来的；第二，它于1936年首次在国际数学家大会上颁发后，自1950年起都是在每隔四年才召开一次的国际数学家大会上隆重颁发的，且每次获奖者仅2～4名；第三，也是最根本的一条，是由于得奖人的出色才干和重要成就赢得了国际社会的公认。正如20世纪著名数学家外尔(C. H. H. Weyl)对1954年两位获奖者的评价：他们“所达到的高度是自己未曾想到的”，“自己从未见过这样的明星在数学天空中灿烂升起”，“数学界为你们二位所做的工作感到骄傲”。所以，菲尔兹奖对青年数学家来说，是世界上最高的国际数学奖。

高斯奖

高斯奖是以德国数学家高斯(Gauss，1777—1855)的姓氏命名的国际性数学奖。

高斯被后人誉为“数学王子”，他是18—19世纪数学史上的杰出代表。他的数学研究几乎遍及所有领域，在数论、代数、非欧几何、复变函数和微分几何等方面都做出了开创性的贡献。他还把数学应用于天文学、大地测量学和磁学的研究。高斯的数论研究总结在《算术研究》中，这本书奠定了近代数论的基础，它不仅是数论方面的划时代之作，也是数学史上不可多得的经典著作之一。高斯对代数学的重要贡献是证明了代数基本定理，他的存在性证明开创了数学研究的新途径。1828年高斯出版了《关于曲面的一般研究》，全面、系统地阐述了空间曲面的微分几何学，并提出内蕴曲面理论。在德国慕尼黑的博物馆有一幅高斯的油画像，底下几行字很贴切地说明了他的成就：“他的思想深入数学、空间、自然的最深秘密，他测量星星的路径、地球的形状和自然力，他推动了下个世纪的数学进展。”

高斯奖由德国数学会与国际数学联合会联合颁发，并由德国数学会管理。该奖由一枚奖章和奖金(目前为1万欧元)组成，其奖金来源是1998年柏林国际数学家大会经费的结余。

高斯奖的设立主要是为了帮助更多的人认识到“数学是许多现代技术的潜在推动力”，是为了“表彰那些其数学研究工作成果对数学之外的领域——如技术、商业或者人们的日常生活，产生巨大影响的科学家”，“奖励范围包括数学对其他学科的影响”。

高斯奖设立于2002年4月30日，即高斯诞辰225周年之际。该奖的获得者由国际数学联合会遴选的评审团评定，并在每四年召开一次的国际数学家大会上颁发。

克拉福德奖

诺贝尔奖没有考虑数学与天文学等学科，许多科学家认为这是美中不足。为此，瑞典实业家克拉福德(H. Crafoord)于1980年慷慨捐资，成立了安娜·格蕾塔和霍尔格·克拉福德(Anna Greta and Holger Crafoord)基金会，对在诺贝尔奖没有涉及的几个领域如数学、天文学、地球科学、生物学(特别是生态学)中和多发性关节炎的基础研究方面做出杰出贡献的科学家进行奖励，称为克拉福德奖。

克拉福德从事纸浆和纸的生产，制造人造肾脏，从中积累起财富，他还是瑞典著名的银行家。

克拉福德奖由瑞典皇家科学院组织评定，奖金数额与诺贝尔奖相当，每年只评选一个学科中一个或数个对该学科有杰出贡献的获奖者，因此数学的克拉福德奖每六年才颁发一次。

阿贝尔奖

阿贝尔奖是以已故的挪威数学家阿贝尔的姓氏命名的。

为了纪念阿贝尔对数学的杰出贡献，为了促进数学的发展，挪威政府于2001年9月宣布，决定设立相当于4 800万马克的基金，自2003年开始，每年一度对为数学做出杰出贡献的数学家颁发阿贝尔奖，奖金为600万挪威克朗(现约为80万美元)。

邵逸夫奖

邵逸夫奖是由香港著名实业家邵逸夫爵士创立的国际性奖。

邵逸夫先生长期致力于文化、教育、慈善事业，以邵逸夫名字命名并由其资助的邵逸夫奖于2002年11月15日在香港设立，用以表彰世界范围的杰出科学家。

邵逸夫奖的网站指出：“社会进步、文明发达，全赖古今才识之士，锲而不舍，在各个人类活动领域内钻研开拓，发明创造。他们是文明的先驱者，为世人尊崇。‘邵逸夫奖’的设立，是向先驱者致意，亦藉以鼓励有志之士努力推动文明；其次，‘邵逸夫奖’的办法原则，是不论得奖者的种族国籍、宗教信仰，只考虑其在学术、科学研究或应用上获得突破成果，和该成果有否对人类生活生产意义深远的影响。”

“邵逸夫奖”现设3个奖项，分别为天文学奖、生命科学与医学奖、数学科学奖。每年颁发一次，每项奖金100万美元。提名及评审程序于每年7月开始，翌

年 6 月宣布得奖人名单并于同年颁奖。

华罗庚数学奖

“华罗庚数学奖”是为纪念在纯粹数学和应用数学方面均作出卓越贡献的数学家华罗庚先生，并鼓励那些为发展中国数学事业而孜孜追求的数学家而设立的，由湖南教育出版社捐资与中国数学会共同主办，每两年评奖一次。遵照华罗庚数学奖奖励条例，该奖主要奖励长期以来对发展中国的数学事业作出杰出贡献的我国数学家，获奖人年龄在 50 岁至 70 岁之间。获得这一奖励的数学家都具备较高的学术水平，因而引起了国内外数学界的瞩目，对促进我国数学研究起到了积极作用。

“华罗庚数学奖”由中国数学会负责评奖与颁奖工作。中国数学会常务理事会组成评奖委员会，其成员由正副理事长、秘书长和个别专家组成，他们都是知名数学家。评奖委员会随中国数学会理事会换届而换届（四年一届）。“华罗庚数学奖”自 1992 年开始设立以来，每两年举办一届，每届 2 人，每人奖金为 10 万元人民币，由国家领导人出席大会并为获奖者颁奖。“华罗庚数学奖”在海内外数学界的影响越来越大。

陈省身奖

陈省身奖是由国际数学联合会（IMU）和陈省身奖基金会（CMF）为纪念杰出数学家陈省身而设立的一项国际性奖。

陈省身奖基金会是美国的一个非政府、非营利的科学组织，由陈省身数学研究基金会和西蒙斯①基金会捐助而设立，陈省身奖基金会创立陈省身奖，并向陈省身奖提供奖金。

“陈省身奖是终身成就奖，授予在数学领域应获得最高表彰的个人。”获奖者由国际数学联合会和陈省身奖基金会所任命的一个委员会来挑选。

陈省身奖是在每 4 年一次的国际数学家大会的开幕式上颁发，“包括一枚奖章及 50 万美元奖金，该奖要求奖金一般捐给由获奖人所选择的有助于数学发展的研究、教育、扩展或其他活动的机构……陈省身奖的设立，使国际数学联合会的

①西蒙斯（J. H. Simons，1938—），美国数学家、学者、投资家和慈善家，他在数学上与陈省身合作，有现称为“陈—西蒙斯变量”的重要成果，在弦理论中有广泛应用。1978 年，他离开学术界，开始经营投资基金，2006 年《财经时代》称他是“世界上最聪明的亿万富翁”。投资事业成功后，他向科研机构特别是数学研究机构捐赠了大量资金。

奖项拓宽到包括长期的具有杰出理论成就的工作。”

丘成桐中学数学奖

为鼓励华人数学研究和教育发展，激发全球华人青少年对数学的兴趣，并及早发掘与培养全世界的华人数学英才，丘成桐教授提出举办一个中学生数学比赛，希望通过专题研究，培养新一代中学生的数学素养，引发青年人探索知识的兴趣及提升他们的创新能力。

泰康人寿保险股份有限公司大力支持此举，最终与丘成桐教授协作配合，联合设立了“丘成桐中学数学奖”。前三届颁奖仪式已分别于 2008 年 10 月、2009 年 12 月和 2010 年 12 月在北京举行。为了提升同学们对应用数学的兴趣及研究能力，2010 年起新加了应用数学科学奖。

丘成桐中学数学奖和丘成桐应用数学科学奖面向全球的华裔中学生数学团队，设立奖项如下：

(1)各设金奖一名，每队奖励 15 万元；

(2)各设银奖一名，每队奖励 10 万元；

(3)各设铜奖约三名，每队奖励 6 万元；

(4)数学奖设优胜奖约五名，每队奖励 3 万元。

对成绩特别优秀的青少年数学团队，可授予特等奖。由评审委员会书写评语，在报考国内外著名大学时推荐优先录取获奖学生。相应奖金的 30%用于颁发给获奖学生的指导教师和所在学校。另外不定期设立“保险精算师大奖”，奖励金融数学、经济学方面最优秀的研究报告，并颁发证书。

丘成桐大学生数学竞赛

该竞赛面向中国大陆、香港及台湾地区高校在校大学生，全面测试大学生的数学知识、修养与能力，促进中国的大学数学教育改革。丘成桐教授领衔的学术与命题委员会将基础数学与应用数学凝炼成分析与微分方程，几何与拓扑，代数、组合与数论，应用与计算数学，概率统计等五个方面，并提供详细的大纲与参考书。测试范围和国外知名大学的数学资格考试相当。测试成绩可以为国内外录取研究生提供重要的参考，这为年轻学子进入现代数学大门提供了有利的条件。

许宝騄统计数学奖

为了纪念和表彰著名数学家许宝騄(1910—1970)先生对于数理统计学的卓

越贡献，1984 年由钟开莱、郑清水、徐利治等国内外数学家发起，设立了“许宝騄统计数学奖”，奖励在数理统计和概率论方面有创造性论文的青年数学家。该奖每年评选一次，要求获奖者年龄不超过 35 岁。1985 年，华东师范大学的郑伟安获得首届许宝騄统计数学奖。

钟家庆数学奖

为纪念英年早逝的中国杰出的数学家钟家庆教授，部分中国数学家、钟家庆的亲属及生前友好共同发起“钟家庆纪念基金”的募集活动，于 1988 年设立“钟家庆数学奖”，委托中国数学会承办。该奖项奖励优秀的青年数学工作者，以数学论文水平为评选标准，重点在于鼓励具有创造性的数学研究工作(包括纯粹数学与应用数学)。获奖者必须是在学或者毕业不超过 2 年的国内大学或研究所的博士或硕士研究生。从 1989 年首次颁奖，每年或隔年颁发一次，每次评出“优秀博士论文奖”(一般 2 名)及“优秀硕士论文奖”(一般 2～3 名)。

CSIAM 苏步青应用数学奖

CSIAM 苏步青应用数学奖由中国工业与应用数学学会(CSIAM)于 2003 年 10 月设立，旨在奖励在数学对经济、科技及社会发展的应用方面作出杰出贡献的工业与应用数学工作者，以鼓励和促进我国工业与应用数学工作的发展。

苏步青数学教育奖

这是经海内外几位数学家倡议，由复旦大学、上海市教育委员会、上海市中小学幼儿教师奖励基金联合会发起设立的国内第一个奖励中学数学教育工作者的奖项。该奖项设立于 1992 年，其宗旨是为了纪念苏步青教授几十年如一日重视基础数学教育的精神，促进中国基础教育事业的进步和基础数学教育的发展。

吴大任、熊知行数学教学奖

2002 年，由陈省身先生提议设立的首届“吴大任、熊知行数学教学奖”在南开大学颁奖。“吴大任、熊知行数学教学奖”的设立是为了纪念吴大任先生，并奖励那些长期在本科生教学第一线，工作兢兢业业、成绩突出的教师。

冯康科学计算奖

冯康科学计算奖是为了纪念著名数学家冯康先生对中国计算数学事业所作

出的杰出贡献，于 1994 年 9 月设立的。该奖项旨在奖励在科学计算领域作出突出贡献的海内外中国科学家，每两年评选一次。

晨兴数学奖

“晨兴数学奖”是世界华人数学家大会最高奖，被誉为“华人菲尔兹奖”。该奖项于 1998 年由香港晨兴集团投资设立，用以奖励国际范围内 45 岁以下、在基础数学及应用数学方面有杰出成就的华人数学家。评审委员会由哈佛大学教授、华裔数学家丘成桐以及其他 8 位非华裔的顶级数学家组成，以确保获奖成果的水准和评奖过程的客观公正。每位晨兴数学奖得主均获颁证书、奖章及奖金。每位金奖得主获赠 2.5 万美元，每位银奖得主获赠 1 万美元。

二、数学研究机构



美国普林斯顿高等研究院

高等研究院(Institute for Advanced Study)于1930年成立于美国距离纽约不远的小镇普林斯顿,但并不是著名的普林斯顿大学的一部分。普林斯顿高等研究院是一个各个领域的科学家做最纯粹的尖端研究,而不受任何教学任务、科研资金或者赞助商压力的研究机构。研究院不授予学位,所有成员都是获得过博士学位的研究人员。

研究院虽然和大学没有互属关系,但是有很深的渊源。研究院最早是借用普林斯顿大学数学系的办公室,主要人员如冯·诺伊曼、范布伦也来自数学系。研究院的许多教授也同时兼任普林斯顿大学的教授。

普林斯顿高等研究院设有历史研究学院、数学学院、自然科学学院和经济科学学院,还有一个新设立的理论生物研究计划。每个研究学院都有一个小规模的终身研究员团体,每年也会有一些访问学者作为补充。

瑞典米塔-列夫勒研究所

米塔-列夫勒研究所(Mittag-Leffler Institute)是一个数学研究所,位于瑞典斯德哥尔摩的郊区,是瑞典皇家科学院下属的研究所之一。其建筑物外形好似一座古堡,因靠近海滨,周围又都是草地和花园,所以一到夏日便风景如画。冬天降临以后,这里成为一片冰天雪地,而且长夜漫漫,日照时间每天只有5～6个小时。不过对数学家来说,这倒是冥思苦想、埋头工作的最好环境。

研究所的大楼原来是M. G. 米塔-列夫勒夫人的住宅,米塔-列夫勒后来捐赠了这座楼和自己藏书丰富的数学图书馆。然而1927年米塔-列夫勒去世后,他的财产不足以成立一个活跃的研究所,直到1969年才在卡尔松的领导下正常运行。在20世纪有许多年,为诺贝尔奖获得者举办的庆祝晚宴都在这里进行。

德国马克斯·普朗克数学研究所

马克斯·普朗克数学研究所(Max-Planck Institute of Mathematics),简称马普研究所,位于德国波恩,以德国物理学家马克斯·普朗克命名,是马克斯·普朗克学会下属的几十个研究所之一,前身是波恩大学的纯粹数学研究所。马克斯·普朗克学会是联邦德国支持的科学研究机构,性质类似于中国科学院。数学研究所由希策布鲁赫于1980年创立,他任研究所所长直至1995年退休。

马克斯·普朗克数学研究所成立后,就从波恩大学内迁了出来,并在莱茵河岸市区买了一幢居民楼作为所址。

每年夏天,该所都要举行一次为期一个月的大型工作会议,至少邀请上百名国内外的学者参加,报告和讨论国际上一年来最新的数学成果。

法国高等科学研究所

法国高等科学研究所(Institute of Advanced Scientific Studies)是一家从事数学和理论物理尖端研究的机构,坐落于巴黎南郊的伊薇特河畔比尔镇。高等科学研究所远离巴黎的闹市区,环境不仅十分安静,而且周围的绿化程度相当高。

该所1958年由实业家兼数学家莫查纳(Léon Motchane)创立。它向顶尖的学者提供了一个专心研究的场所,没有教学指标或者行政任务。.该所的规模很小,只有十来名教授,此外可以接纳三四十名访问学者。与许多其他研究所相同,高等科学研究所也是向国内外开放的。

该所出版一份数学刊物《高等科学研究所数学出版物》,目前每年出两卷。一些著名数学家曾任或现任该所的永久教授,包括菲尔兹奖得主(以获奖时间为序)勒内·托姆、亚历山大·格罗滕迪克、皮埃尔·德利涅、阿兰·孔涅、让·布尔甘、马克西姆·孔采维奇、洛朗·拉福格和沃尔夫奖得主米哈伊尔·格罗莫夫。

研究所的研究领域只包括两个方面:数学和理论物理,其中以数学为主。所内有为数不多的永久成员,其他均为从国内外邀请来的临时成员。这里需要特别说明的是,国外研究所的永久成员,通常并非是永久不变的,但是,是否变化却取决于这些永久成员本身。换言之,永久成员或终身教授的含义是指,聘用的一方不能够随意解聘被聘用的一方,而受聘者在接受了这一荣誉后仍可以自愿辞聘、另谋高就。这样做的目的,可能是为了让教授们能安心地长期从事研究工作,而不必为生活问题担心。当然,这也是对教授地位的一种尊重。

斯捷克洛夫数学研究所

斯捷克洛夫数学研究所(Steklov Institute of Mathematics)于1934年4月24

日在列宁格勒由苏联科学院大会决议成立。斯捷克洛夫于 1921 年向列宁陈述了数学的重要性，并提议成立一个专门从事数学研究的机构。研究所成立后，斯捷克洛夫自己却不当所长。为纪念这位创始人，该所后来便以其名字命名。

研究所下设 13 个研究室。物理学和力学在该所的研究课题中占一定比重。1940 年研究所迁到莫斯科。

大数学家柯尔莫戈洛夫(Kolmogorov，1903—1987)、彼得洛夫斯基(Petrovski)、庞得里亚金(Pongtriyagin)、拉夫连季耶夫(Lavranchev)、索伯列夫(Sobolev)、谢瓦拉维奇(Shevarevich)、阿诺德(Arnod)等都曾在斯捷克洛夫数学研究所工作过。

中国科学院数学与系统科学研究院

见本书第 201—202 页。

三、国内高校所设的与数学相关的奖项*

北京大学

1. 江泽涵奖学金

1991 年，北京大学数学系设立“江泽涵奖学金”，江泽涵及其夫人从平生积蓄中拿出 5 万元作捐款，奖励学生的学习和研究。

2. 周培源数学奖学金

1998 年，王选将多年来获得的 30 万元奖金捐献给北京大学数学学院，设立“周培源数学奖学金”。

3. 北京大学 92 奖学金

2012 年 5 月，北京大学 1992 级校友在纪念入学 20 周年之际，为了报答母校的培养，支持母校创建世界一流大学的事业，发起设立了“北大 92 基金”并成立了基金管理委员会。奖励资助对象为元培学院、新闻与传播学院和数学科学学院的本科生和研究生。

复旦大学

1. 刘钧数学纪念奖

该奖项是由复旦大学数学科学学院 1983 届毕业生刘钧的家属，将刘钧生前的个人资产变现后设立的，从 2006 年开始颁发，以奖励该学院的优秀学生。

2. 数学科学学院院长奖学金

每年 9 月份启动评选。奖励名额为 3 名，1 名一等奖，2 名二等奖。奖金额度由该学院与设奖方协商而定。

---

* 这部分内容取自网络，我们只整理了与数学相关的部分奖项，仅供参考，最新或更新后的信息请浏览相关高校主页。

浙江大学

1. 浙江大学数学系鲍岳桥奖教金

2. 浙江大学数学系吴月华奖教金、奖学金

3. 浙江大学数学系美通奖学金

2013 年浙江大学数学系杰出校友鲍岳桥、吴月华、徐力出资设立了“浙江大学数学系鲍岳桥奖教金”、“浙江大学数学系吴月华奖教金、奖学金”、“浙江大学数学系美通奖学金”，用以奖励优秀学生和教师。

南开大学

日新奖学金

由南开大学 89 级校友共同捐赠设立，从 2010 年开始颁发，旨在帮助对数学最有兴趣、最喜欢钻研并取得优秀成绩的学生，奖励对象是数学学院数学试点班二、三、四年级本科生。

四川大学

1. 展虹助学金、奖研金

1997 年该奖项由第八届全国政协常委、香港英慧集团董事长赵展岳先生及夫人潘叶虹女士捐资设立，旨在资助及奖励四川大学数学学院、物理学学院、化学学院、生命科学学院的学习成绩优秀或家境贫困却渴望学习的学生。

2. 刘应明奖学金

由刘应明院士的学生何明博士在 2006 年首先倡议发起并作为首个捐赠人，后又有相关部门及刘院士的其他学生捐赠而设立，旨在奖励四川大学数学学科品学兼优的青年教师与研究生。

3. 娇子奖学金

2006 年由川渝中烟工业公司捐资 200 万元人民币设立。奖助对象主要为当年在数学学院初次参加工作的博士或博士后，以及数学学院在读的勤奋学习、品学兼优或家庭经济困难、学习刻苦用功积极向上的学生。其中娇子青年教师奖为 5 000 元/人，娇子奖学金为 3 000 元/人，娇子助学金为2 000 元/人。

清华大学

1. 丘成桐中学生科学奖

2013 年“丘成桐中学科学奖”启动，由国际著名华人数学家丘成桐教授与泰

康人寿保险股份有限公司联合设立，也获得了美国 John Templeton 基金会为期三年的赞助。该奖项下设数学奖和物理奖，通过组织中学生学科竞赛，激发和提升全球华人中学生对于数学和物理学研究的兴趣和创新能力，发现和培养有前途的年轻数学、物理学天才，增进海内外华人中学生的相互了解与友谊。

2.新世界数学奖

新世界数学奖(NWMA)于 2007 年由新世界发展有限公司总经理郑家纯博士和杰出数学家丘成桐教授共同发起，旨在鼓励全世界杰出的华人数学学子追求数学真理。

北京师范大学

谢宇教育基金

为了纪念已故的谢宇教授，弘扬其终身致力于教育工作的精神，谢宇教育基金会决定通过给学生和教师提供奖学金和资助，促进华人社群以及其他社群的教育水准。基金会的资金来源于谢宇的学生、同事，以及其他认同基金会使命的个人和团体。基金会每年发放一次奖学金和资助给学生和老师(在初始阶段仅限于北京师范大学的学生和老师)，发放时间在五月四日(谢宇生日)左右。

西安交通大学

1.徐宗本应用数学奖

该奖项由西安交通大学数学与统计学院的校友及相关企业发起并捐赠设立，2013 年颁发了首届“徐宗本应用数学奖”。奖励对象为西安交通大学数学与统计学院、电子与信息工程学院优秀在读研究生。一等奖 1 项，二等奖 2 项，资助金额为:一等奖人民币 1 万元，二等奖人民币 5 000 元。

2.徐宗本应用数学论文奖

该校数学与统计学院的校友及相关企业发起并捐赠设立西安交通大学“徐宗本应用数学论文奖”。该奖项用于奖励数学与统计学院、电子与信息工程学院在应用数学、计算数学、运筹与控制、统计学、数学与信息技术交叉领域做出创新性贡献的在读研究生。该奖项由独立委员会负责评奖，每年颁发一次，每次奖励研究生 5 名(其中一等奖 2 名，二等奖 3 名，一等奖奖金不低于 1 万元，二等奖奖金不低于 5 000 元)。

山东大学

潘承洞奖学金

1997 年由山大鲁能、中创软件、山东地纬计算机、济南得安公司和潘承洞先生的学生们发起并捐资设立“潘承洞奖励基金”，旨在奖励优秀学生，纪念潘承洞院士对我国数学事业做出的杰出贡献。由基金会每年从基金收益中提取一定金额颁发“潘承洞奖学金”。“潘承洞奖学金”暂时只面向山东大学数学与系统科学学院的研究生和本科生，每年评选一次，每人每次奖励 5 000 元。

厦门大学

郭金顶、郭庄丽华奖学金

由 1958 年就读于该校数学系的校友郭金顶先生捐资设立，每学年出资 5 万元用于奖励数学科学学院 50 名品学兼优的本、硕、博在校生，每人 1 000 元。

重庆大学

1. 数学与统计学院“鱼游奖学金”

奖励对象为重庆大学数学与统计学院本科生。奖励金额：一等奖学金 3 000 元/(人・学年)，名额 3 人；二等奖学金 1 000 元/(人・学年)，名额 11 人。

2. 樊畿奖学金

“樊畿奖学金”由著名数学家樊畿先生设立，旨在鼓励学生热爱数学，从事数学研究，帮助学生完成学业。2013 年该奖学金开始奖励重庆大学数学与统计学院的学生。

西北大学

简劲鸿奖学金

简劲鸿是该校数学系 78 级校友、上海家化置业有限公司董事长、上海国际汽车城置业有限公司董事长，他设立了“西北大学简劲鸿奖学金”，旨在奖励数学学院品学兼优的学生。

南京师范大学

1. 黄开斌特别奖学金

2. 施中柱奖助学金

黄开斌教授生前系南京师范大学数学科学学院知名教授，计算数学专家，她无私捐助 10 万元人民币给学院，从 2008 年起设立“黄开斌特别奖学金”，2013 年 4 月雍峥嵘先生又为“黄开斌特别奖学金”捐资 10 万元。施中柱先生生前是该校

原数学系计算数学教研室主任，将毕生省吃俭用积蓄的 50 万元人民币捐献给学院，用于设立学生奖助学金。

西南交通大学

1. 西南交通大学出版数学奖学金

由西南交通大学出版社于 2009 年设立，旨在支持西南交通大学基础学科发展，鼓励学生勤奋学习，按学年评选。奖励对象：西南交通大学数学学院本科生、研究生。

2. 李土秀数学专项奖学金

李土秀数学优秀学生专项奖学金在西南交通大学数学学院数学与应用数学、信息与计算科学、统计学三个专业的在校一、二年级本科生中评定；李土秀数学优秀学生专项助学金在一、二、三年级本科生中评定。李土秀奖学金每学年评定 4 名本科生，每人奖励 2 500 元；李土秀助学金每学年评定 5 名本科生，每人奖励2 000 元。

3. 郭可詹-黄盛清数学奖学金

用于奖励西南交通大学数学学院数学与应用数学、信息与计算科学、统计学三个专业的在校三年级和四年级本科生，每学年评定一次。奖励金额：每学年评定 3 名本科生，每人奖励 5 000 元。

华南师范大学

汉强奖学金

该奖学金由数学科学学院（原数学系）81 届毕业生王汉强先生于 2006 年捐资 20 万元设立，现已累计注资一百多万元。每年资助 20 名学生，分别为优秀奖 10 名，奖金 3 000 元/名；勤奋奖 10 名，奖金 2 000 元/名。

太原理工大学

“明数”奖教奖学金

该奖教奖学基金来源为老教授、校友和社会捐赠，用于奖励太原理工大学数学学院的优秀青年教师和在读的品学兼优的三年级本科生，每年评选一次。

上海理工大学

田家炳理科创新、竞赛奖励基金

田家炳先生是香港一位企业家和慈善家，数十年致力公益，捐助教育、医疗与其他利国利民的慈善事业，贡献良多。

湖北大学

1. 纪念忠仁助学金

湖北大学“纪念忠仁”助学金是由曾经在数学系工作过的部分教师为了纪念原数学系主任朱忠仁老师而捐赠设立的学生助学金。助学金资助方对湖北大学数学与计算机科学学院2011级全日制本科生中部分品学兼优、家境困难的学生，每年捐赠一定金额人民币，帮助学生完成四年的学业。

2. 数学校友励志奖学金

数学校友励志奖学金是2014年由2000级数学与应用数学专业(1)班的25名同学发起设立的，用于奖励数学与应用数学专业成绩优秀的学生，鼓励他们积极从事数学领域的学习和研究。

中科院数学与系统科学研究所

1. 博时奖学金

博时基金管理有限公司自2008年起在中国科学院设立“博时奖学金”，奖励在金融与经济管理、数学和系统科学领域学习成绩优秀的研究生。

2. 格林奖学金

格林集团于2006年在中科院数学与系统科学研究院、中科院研究生院设立了面向经济分析和金融研究方向的“格林奖学金”。

中国人民大学

萨师煊精英基金

为继承和发扬以萨师煊教授为代表的信息学院老一辈学者关爱后学、培育人才的优良传统，为国家培养造就更多的优秀人才，2009年中国人民大学信息学院联合校内外各界成立“萨师煊精英基金”。奖励范围为中国人民大学信息学院在校本科生、研究生。

东南大学

1. 高金衡奖学金

2013年，东南大学退休教师高明把已故丈夫、数学系高金衡教授的6万元抚

恤金和自己的4万元退休金捐赠给东南大学教育基金会，设立总额10万元的“高金衡奖学金”，用于奖励数学系的本科生。

2. 东南大学71871奖励教师基金

2011年，数学系71871班校友与东南大学教育基金会签订了该基金协议，用于奖励数学系优秀教师。

北京理工大学

徐特立奖学金

作为该校校级奖学金最高奖项，以我国著名的教育家、北京理工大学的前身延安自然科学院院长徐特立的名字命名，用于奖励该校本科生、专科生、研究生中的优异生以及徐特立生前任教的中、高等学校和其他学校的优异生。根据老校友倡议，并经原兵器工业部批准，于1987年在北京理工大学（原北京工业学院）设立徐特立奖学金。

北京科技大学

业精于勤数学统计学奖学金

由北京钢铁学院（现北京科技大学）数学专业毕业校友发起设立了“业精于勤奖学金”基金，将该基金每年的收益作为奖学金奖励在物理学、数学方面成绩优秀的学生。2012年首次颁发“业精于勤数学统计学奖学金”。

电子科技大学

1. 数学之星

“数学之星”是数学学院最高的个人荣誉称号，其目的在于表彰德、智、体诸方面表现特别优秀，为社会做出贡献，为学院赢得荣誉的学生。

2. 杰出贡献奖

“杰出贡献奖”奖励积极参与数学学院毕业生活动组织工作和四年来对学校、学院相关工作做出杰出贡献的学生。

中国海洋大学

爱华奖学(教)金

2005年由美籍华裔教授王爱华女士出资设立，奖励数学科学学院品学兼优的学生，每年奖励8名学生，每人1 000元。

南京理工大学

七七数力奖学金

77 级数力班海外校友于 1998 年倡议设立“七七数力奖学金”，并成为资金的主要筹集者。该奖项的评判标准有着特殊的考虑，旨在颁给有志于从事数学、力学研究的优秀学生。“七七数力奖学金”设有两个奖项，奖金额度已达到今天的“10 000 元”、“1 000 元”，成为南京理工大学最高额度的奖学金。

武汉理工大学

理苑之星

武汉理工大学理学院为了弘扬“风正、气顺、人和、奋进”的学院精神，营造人人学先进创佳绩的良好氛围，不断推进学院各项事业科学发展，自 2011 年起在全院范围内遴选立足本职取得突出成绩的教职工和学生为学院年度“理苑之星”。

陕西师范大学

“启夏英华-中交通力”奖教金

简介：数学系 79 级校友吴民侠所在的中交通力建设股份有限公司捐资 100 万元人民币，于 2014 年设立了陕西师范大学“启夏英华-中交通力”奖教金，奖励坚持工作在教学一线、教学效果好、师德高尚、成果突出、关心学生、关注公益的优秀教师。

福建师范大学

维新教育基金

该基金是由福建师范大学数学系 61 级学生、香港知名企业家吴维新先生于 2006 年捐资 300 万元创立的。该基金奖励金额高、覆盖面广、影响大，每年出资 30 万元奖励福建师范大学数学与计算机科学学院品学兼优的学生和资助贫困学生。

参考文献

1 顾沛.数学文化.北京:高等教育出版社,2008.

2 葛斌华,梁超,武修文.数学文化漫谈.北京:经济科学出版社,2009.

3 薛有才.数学文化.北京:机械工业出版社,2010.

4 [美]迈克尔.J.布拉德利著.现代数学 1900—1950 年.王潇译.上海:上海科学技术文献出版社,2011.

5 John Stillwell 著.数学及其历史.袁向东,冯绪宁译.北京:高等教育出版社,2011.

6 Timothy Gowers 主编.普林斯顿数学指南(第三卷).齐民友译.北京:科学出版社,2014.

7 林夏水.数学哲学.北京:商务印书馆,2003.

8 王青建.数学史简编.北京:科学出版社,2005.

9 方延明.数学文化.北京:清华大学出版社,2007.

10 李文林.数学史概论.北京:高等教育出版社,2008.

11 Howard Eves 著.数学史概论.欧阳绛译.哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2009.

12 [英]斯科特著.数学史.侯德润,张兰译.北京:中国人民大学出版社,2010.

13 王宪昌.数学文化概论.北京:科学出版社,2010.

14 [美]M.Kline 著.西方文化中的数学.张祖贵译.上海:复旦大学出版社,2004.

15 [美]克利福德·A.皮科夫著.数学之恋.马东玺译.长沙:湖南科学技术出版社,2010.

16 王亚辉.数学史选讲.合肥:中国科学技术大学出版社,2011.

17 R.柯朗,H.罗宾著.什么是数学:对思想和方法的基本研究.左平,张饴慈译.上海:复旦大学出版社,2012.

18 席南华主编.数学所讲座 2010.北京:科学出版社,2012.

19 丘成桐,杨乐,季理真主编.数学无处不在.北京:高等教育出版社,2012.

20 张奠宙,王善平著.数学文化教程.北京:高等教育出版社,2013.

21 [美]齐斯·德福林著.数学的语言——化无形为可见.洪万生译.桂林:广西师范大学出版社,2013.

22 李心灿.当代数学大师——沃尔夫数学奖得主及其建树与见解(第四版).北京:高等教育出版社,2013.

23 胡作玄.引起纷争的金苹果:哲人科学家康托尔.福州:福建教育出版社,1997.

24 胡作玄.近代数学史.济南:山东教育出版社,2005.

25 韩雪涛.从惊讶到思考——数学悖论奇景.长沙:湖南科学技术出版社,2007.

26 吴文俊主编.世界著名数学家传记.北京:科学出版社,2003.

27 徐品方,张红著.数学符号史.北京:科学出版社,2006.

28 [美]约翰·塔巴克著.代数学:集合、符号和思维的语言.邓明立,胡俊美译.北京:商务印书馆,2007.

29 郭书春主编.中国科学技术典籍通汇·数学卷.郑州:河南教育出版社,1993;大象出版社,1996,2015.

30 郭书春主编.中国科学技术史·数学卷.北京:科学出版社,2010.

[General Information]
书名=大众数学史
作者=杨静，潘丽云，刘献军等著
页数=234
SS号=13819789
DX号=
出版日期=2015.06
出版社=山东科学技术出版社